وزارة التعليم
Ministry of Education

موهبة
Mawhiba

نسمو
NSMO

أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني "نسمو"

الحقيبة العلمية للمرحلة الرابعة
نهـــائيـــات "نســـمـــو"2026

الرياضيات- ناشئين

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهرس

مقدمة

أبناؤنا وبناتنا النخبة،

نبارك لكم بلوغكم **مرحلة ما قبل النهائيات** في الأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات، وهي المرحلة التي تُعد تتويجًا لجهودكم المستمرة في الفهم والتدريب والإبداع.

في هذه الحقيبة المميزة، سنواصل التعمق في الفروع الأربعة :**التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد،** مع موضوعات مثل التوافيق، نظرية فيثاغورس، المعادلات التربيعية، والعوامل والمضاعفات المشتركة.

تهدف هذه المرحلة إلى صقل مهارات التفكير العالي والتحليل المنطقي، وتدريبكم على التعامل مع المسائل المركبة التي تتطلب دقة واستنتاجًا متقدمًا.

كما تُعد تمهيدًا مباشرًا للمرحلة النهائية من المسابقة، حيث يظهر التميز الحقيقي في القدرة على الربط بين المفاهيم الرياضية وتطبيقها في مواقف جديدة.

نحن على ثقة بأنكم أهل لهذه المرحلة، ونسأل الله لكم التوفيق والسداد في رحلتكم نحو القمة.

الفريق العلمي للأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات (نسمو) – مسار الرياضيات

الوحدة الأولى : الجبـــــــــر

متطابقتي مربع مجموع والفرق بين عددين

نعلم أنه إذا كان a, b عددين حقيقين فإن:

مربع مجموع حدين:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مربع الفرق بين حدين:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال 1:

عندما يريد ماجد تربيع أي عدد ينتهي بالرقم 5 فهو يستخدم الخطوات التالية:

1. يحذف الرقم 5 في نهاية العدد ليحصل على العدد k.
2. يضرب k في $k+1$، ثم يضيف في نهاية الناتج الرقمين 25.

على سبيل المثال عند حساب 65^2 فإنه يضع $6 \times 7 = 42$ وأمامها 25 فيكون الجواب:

$$65^2 = 4225$$

كيف يكون ذلك صحيحًا؟

الحل:

$$65^2 = (60+5)^2 = 60^2 + 10 \times 60 + 25 = 60(60+10) + 25 = 60 \times 70 + 25$$
$$= 4200 + 25 = 4225$$

وبنفس الطريقة لو استخدم مربع الفرق بين حدين.

$$65^2 = (70-5)^2 = 70^2 - 10 \times 70 + 25 = 70(70-10) + 25 = 70 \times 60 + 25$$
$$= 4200 + 25 = 4225$$

هل يمكنك حساب 105^2 بنفس الطريقة؟

تدريبات :

(1) في كل مما يلي أكمل الفراغ بحيث يصبح المقدار مربع كامل:

$(a)\ x^2 - 6x + \cdots$
$(b)\ x^2 + 7x + \cdots$
$(c)\ x^2 - 0.4x + \cdots$
$(d)\ x^2 - \cdots + 42.25$

(2) أوجد مفكوك ما يلي:

$(a)\ (y+5)^2$
$(b)\ (3z+8)^2$
$(c)\ (x-6)^2$
$(d)\ (-2y+9)^2$
$(e)\ (-x-9y)^2$
$(f)\ (2r-\frac{2}{r})^2$

(3) أوجد قيمة l في المعادلة:

$$5l^2 - 20l = 0$$

(4) أوجد قيمة l في المعادلة:

$$l^2 - 144 = 0$$

(5) أوجد قيمة w في المعادلة:

$$29 = (w-2)^2 - 7$$

(6) أوجد قيمة v في المعادلة:

$$94 - 5(v-3)^2 = 14$$

(7) أوجد قيمة e في المعادلة:

$$3(4+e)^2 - 40 = 68$$

(8) أوجد قيمة m في المعادلة:

$$m^2 - 6m + 9 = 0$$

(9) أوجد قيمة a في المعادلة:

$$a^2 + 36 = 12a$$

(10) أوجد قيمة t في المعادلة:

$$t^2 + 8t - 20 = 0$$

(11) أوجد قيمة h في المعادلة:

$$\frac{3(h-3)}{2} = \frac{27}{2h-6}$$

(12) أوجد قيمة x في المعادلة:

$$\frac{3x-6}{2} = \frac{27}{8x-16}$$

(13) أوجد قيمة y في المعادلة:

$$y^2 + 12y + 32 = 0$$

(14) إذا كان $x - y = 8$ وَ $xy = -15$ فأوجد قيمة كل من:

$a)\ x^2 + y^2$ $b)\ (x+y)^2$ $c)\ x^4 + y^4$

(15) إذا كان

$x = 2025^{1447} - 2025^{-144}$ وَ $y = 2025^{1447} + 2025^{-1447}$

فأوجد $x^2 - y^2$.

معادلة الدرجة الثانية

المقدار: $ax^2 + bx + c = 0$

(بحيث a, b, c ثوابت وَ $a \neq 0$) يسمى معادلة من الدرجة الثانية .

وحلولها تدعى جذور أو أصفار كثيرة الحدود.

لدينا طرق عديدة لإيجاد جذور المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ومنها :

1. التحليل.
2. طريقة إكمال المربع للحصول على مربع كامل كما في المتطابقات.
3. القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حيث Δ المميز ويعطى بالعلاقة : $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا كان: $\Delta > 0$: المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان .

$\Delta < 0$: المعادلة ليس لها جذور حقيقية.

$\Delta = 0$: المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان.

مثال 1:

حل المعادلة $x^2 + 6x + 5 = 0$

بثلاث طرق مختلفة.

الحل:

1- التحليل:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهم 5 وحاصل جمعهم 6

$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5) = 0$
$\Rightarrow (x+1) = 0 \; or \; (x+5) = 0$
$\Rightarrow x = -1 \; or \; x = -5$

2- اكمال المربع:

$x^2 + 6x + 5 = 0$

ننقل الحد الثابت إلى الطرف الأيمن ونضيف مربع نصف معامل x للطرفين

$\Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 3^2$
$\Rightarrow (x+3)^2 = 4$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$\Rightarrow x + 3 = \pm 2$
$\Rightarrow x = -1 \; or \; x = -5$

3- القانون العام:

$x^2 + 6x + 5 = 0$
$a = 1, b = 6, c = 5 \;\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16$
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(1)}$
$\Rightarrow x = \dfrac{-6+4}{2} \;\; or \;\; x = \dfrac{-6-4}{2}$
$\Rightarrow x = -1 \; or \; x = -5$

علاقة الجذر بمعاملات معادلة الدرجة الثانية:

وتسمى علاقة فيتا "Vieta Formula" إذا كان r, s جذري معادلة الدرجة الثانية :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فإن مجموع الجذرين يُعطى بالعلاقة: $r + s = \frac{-b}{a}$

وحاصل ضرب الجذرين يُعطى بالعلاقة: $rs = \frac{c}{a}$.

تدريبات :

(1) أوجد جذور المعادلات التالية:

$(a)\ x^2-12x-540=0$

$(b)\ 3x^2=10x+24$

$(c)\ (x^4-11x^3+24x^2)-(4x^2-44x+96)=0$

(2) أوجد قيمة a التي تجعل للمعادلة:

$$ax^2-5x+9=0$$

جذراً حقيقياً واحداً .

(3) كم عدداً صحيحاً x يحقق المعادلة :

$$(x^2-x-1)^{x+2}=1$$

(4) إذا كان أحد جذور المعادلة :

$a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ هو $x=1$.

أوجد الجذر الآخر في بدلالة a,b,c

(5) إذا كانت a,b هي جذور المعادلة التربيعية $x^2-mx+2=0$.

وبفرض أن $a+\frac{1}{b},b+\frac{1}{a}$

جذري المعادلة التربيعية $x^2-px+q=0$ أوجد قيمة q .

(6) أوجد كل حلول نظام المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x^2+xy=39 \\ x-y=-33 \\ y+z=13 \end{cases}$$

(7) إذا كان $p(x)$ معادلة من الدرجة الثانية بحيث :

$$p(0)=-1,p(1)=9,p(2)=25$$

أوجد $p(-1)$.

(8) أوجد كل قيم k بحيث يكون للمعادلة:

$$x^2+kx+27=0$$

جذران حقيقيان مختلفان .

(9) أثبت أنه إذا كان:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{b}{a+b}$$

فإنه لا يمكن أن يكون كل من a, b أعداداً حقيقيةً.

(10) أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة:

$$(2+(2+(2+(2+x)^2)^2)^2)^2=15129$$

حيث:

$$(15129=123^2)$$

(11) أوجد كل الحلول الحقيقية (x, y) التي تحقق النظام :

$$x^2+y=12=y^2+x$$

(12) أوجد الحل الحقيقي لنظام المعادلات التالية:

$$\begin{cases} 2x_1=x_5^2-23 \\ 4x_2=x_1^2+7 \\ 6x_3=x_2^2+14 \\ 8x_4=x_3^2+23 \\ 10x_5=x_4^2+34 \end{cases}$$

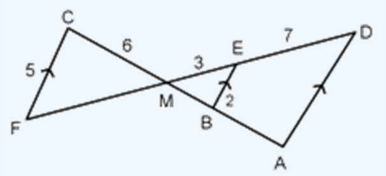
الوحدة الثانية : الهندســـة

تدريبات مراجعة

(1) على الشكل المجاور $AD \parallel BE \parallel FC$.

استخدم الأطوال الموضحة على الرسم لإيجاد أطوال

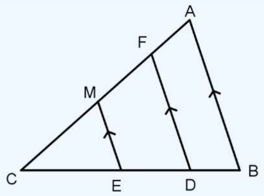
$\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{MB}, \overline{MF}$



(2) على الشكل المجاور $ME \parallel FD \parallel AB$ ، وكذلك لدينا $AF: FM: MC = 2: 3: 5$.

فإذا كان $AF = 4, \ ED = 7.5$ ،

أوجد طول كل من $\overline{EC}, \overline{BD}, \overline{AC}$



(3) المثلث ABC أطوال أضلاعه $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ على الترتيب تساوي 4,5,6، تم تنصيف $\angle A$ بمنصف لاقى $\overline{BC}$ في D.

أوجد طول كل من $\overline{BD}, \overline{DC}$.

(4) المثلث ABC أطوال أضلاعه $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ على الترتيب تساوي 9,5,6، تم تنصيف $\angle A$ الخارجية بمنصف لاقى $\overleftrightarrow{BC}$ في D.

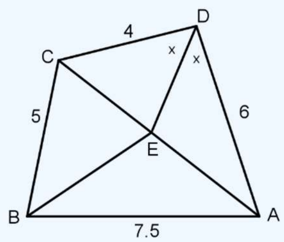
أوجد طول كل من $\overline{BD}, \overline{DC}$.

(5) المثلث ABC فيه X منتصف $\overline{BC}$، تم تنصيف $\angle AXB$ بمنصف لاقى $\overline{AB}$ في D ، وتم تنصيف $\angle AXC$ بمنصف لاقى $\overline{AC}$ في E.

أثبت ان $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

(6) على الشكل المجاور $ABCD$ شكل رباعي فيه $\overrightarrow{DE}$ ينصف $\angle ADC$ ،

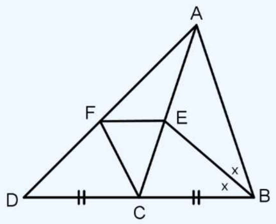
باستخدام الأطوال الموضحة على الشكل أثبت أن $\overrightarrow{BE}$ ينصف $\angle ABC$.



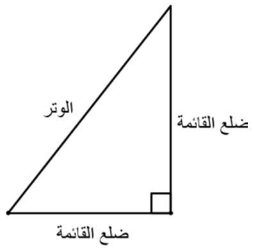
(7) على الشكل المجاور ABC مثلث فيه $AB = AC$ ، رسمت D على

امتداد BC بحيث $BC = CD$ إذا كان $\overrightarrow{BE}$ ينصف $\angle ABC$، $EF \parallel BD$.

أثبت أن $\overrightarrow{CF}$ ينصف $\angle ACD$.



نظرية فيثاغورس* وتطبيقاتها



في هذا الموضوع سنتحدث عن المثلثات القائمة بشكل عام وعن نظرية فيثاغورس بشكل خاص. أما المثلث القائم فهو مثلث إحدى زواياه تساوي $90°$ ونطلق على الضلع المقابل لها وتر المثلث القائم أما الضلعين الاخرين فيسميا ضلعي القائمة. أما نظرية فيثاغورس فتتحدث العلاقة بين الأضلاع الثلاثة في المثلث القائم الزاوية.

نظرية 1 :(نظرية فيثاغورس).

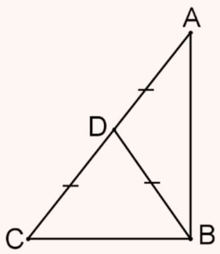
في المثلث القائم الزاوية الذي طولي ضلعي القائمة فيه a, b ووتره c ، مجموع مربعي ضلعي القائمة يساوي مربع الوتر أي أن:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

نظرية 2 :(عكس نظرية فيثاغورس).

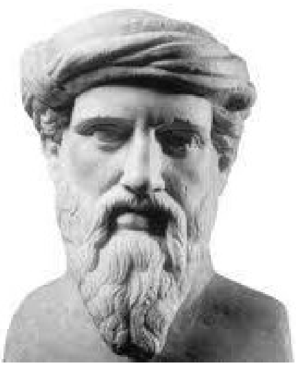
في أي مثلث أطوال اضلاعه a, b, c يحقق العلاقة $a^2 + b^2 = c^2$ فإن هذا المثلث يكون قائم الزاوية عند الزاوية المقابلة للضلع c.

نظرية 3 :



يكون المثلث قائما إذا كان طول أحد متوسطات المثلث يساوي نصف طول الضلع الواصل إليه ويكون هذا الضلع هو وتر المثلث.

$(AD = BD = CD \Rightarrow \angle C = 90°)$.



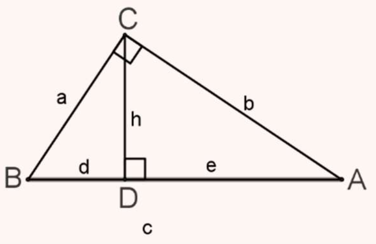
* فيثاغورس كان فيلسوفًا وعالم رياضيات يونانيًا عاش تقريبًا بين عامي 570 و495 قبل الميلاد. وُلد في جزيرة ساموس اليونانية، وتنقّل كثيرًا بين عدة مناطق، منها اليونان ومصر، وربما الهند.

حوالي عام 530 قبل الميلاد، استقرّ في المستعمرة اليونانية كروتون في إيطاليا، حيث أسّس مدرسة خُصّصت لمناقشة الموضوعات العلمية والرياضية. وفي شبابه، رحل عبر بلاد ما بين النهرين (سوريا والعراق حاليًا)، وقضى وقتًا في الدراسة في مصر. وبعد عقدين من السفر والدراسة المكثفة، تمكّن فيثاغورس من استيعاب جميع المعارف الرياضية التي كانت معروفة لدى الحضارات الكبرى في ذلك العصر.

نظرية 4 :

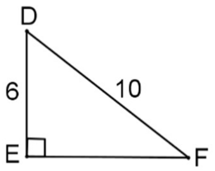
في المثلث القائم الزاوية الذي طولي ضلعي القائمة فيه a, b ووتره c ، والقائم في $\angle C$ وارتفاعه من القائمة على الوتر $DC = h$ وكانت $DA = e, DB = d$. فإن:

$$a^2 = dc\,, \qquad b^2 = ec\,, \qquad h^2 = ed\,, \qquad hc = ab$$

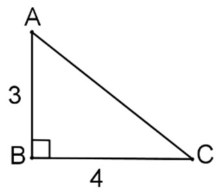


أمثلة:

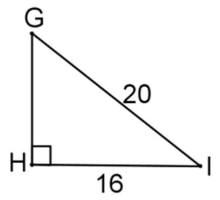
أوجد طول الضلع المجهول في المثلثات التالية



$$EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$



$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

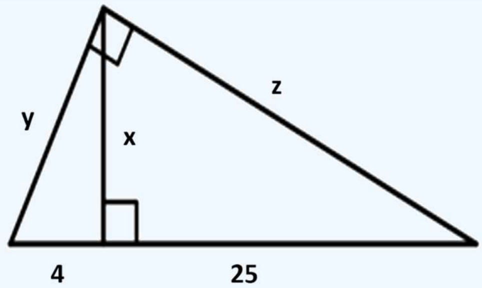


$$GH = \sqrt{GI^2 - HI^2} = \sqrt{144} = 12$$

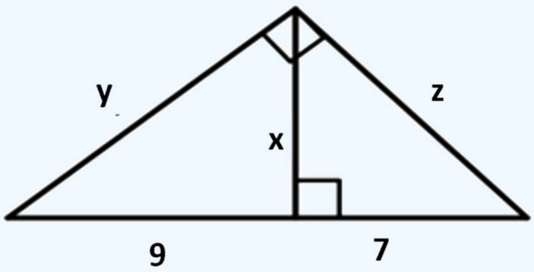
تدريبات :

في التدريبات $(1-7)$ أوجد قيمة x, y, z.

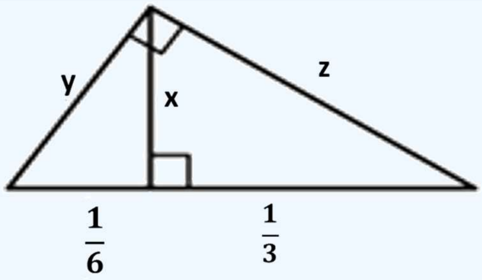
(1)



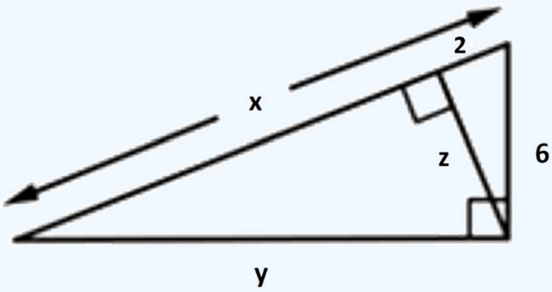
(2)



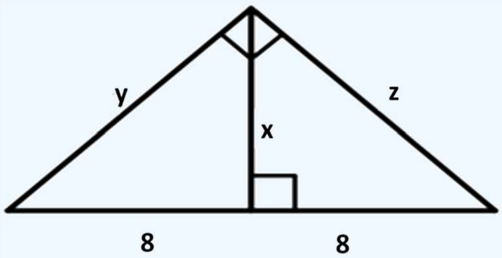
(3)



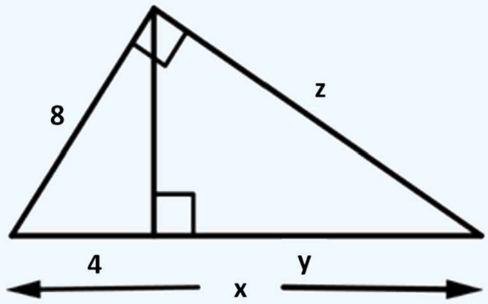
(4)



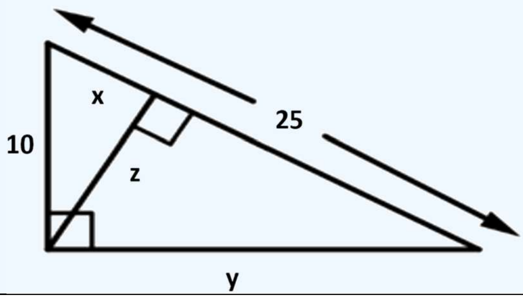
(5)



(6)



(7)

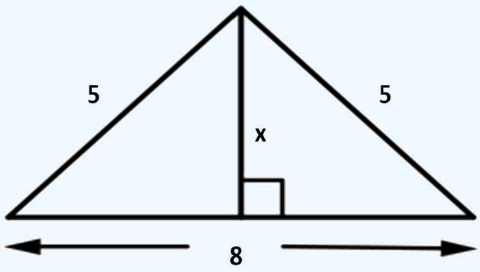


في التدريبات $(8-11)$ إذا علمت طول قطر المربع فأوجد طول ضلعه.

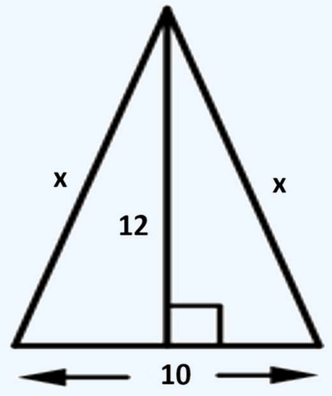
(8)	2	(9)	10	(10)	$20k$	(11)	$7n\sqrt{2}$

في التدريبات (15 – 12) أوجد قيمة x.

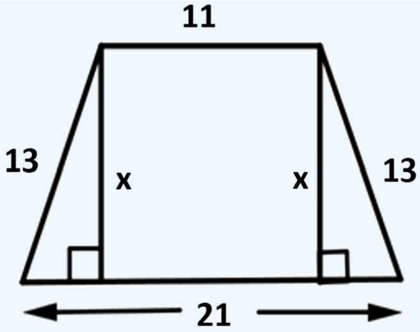
(12)



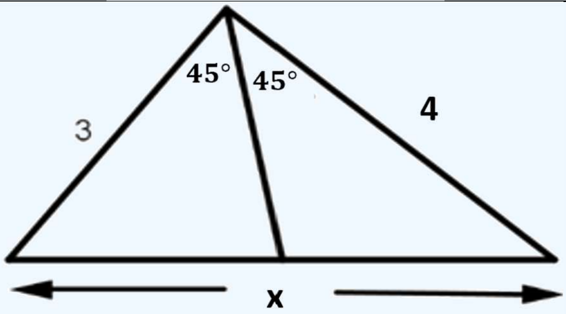
(13)



(14)



(15)



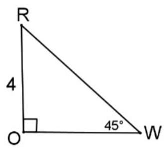
المثلثات الخاصة

نظرية 5 :
في المثلث قائم الزاوية طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $30°$ يساوي نصف طول الوتر،
وطول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $60°$ يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ من طول الوتر.

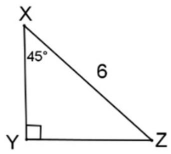
نظرية 6 :
في المثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها $45°$ يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ من طول الوتر .

أمثلة:

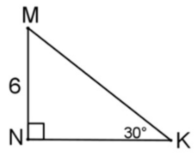
أوجد طول الضلع المجهول في المثلثات التالية



$$OW = 4, RW = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$



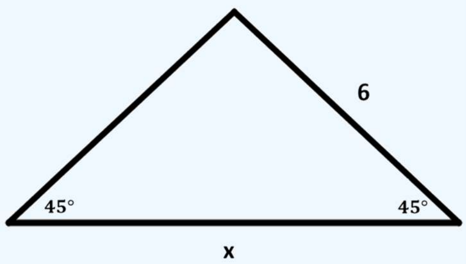
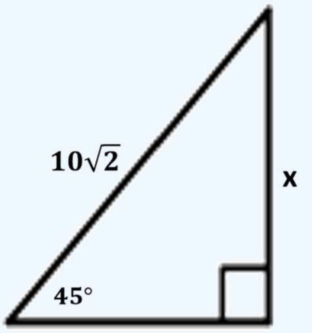
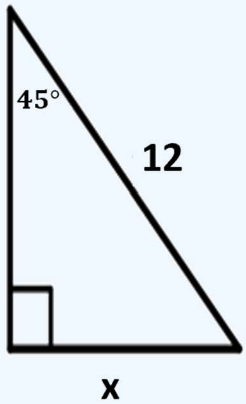
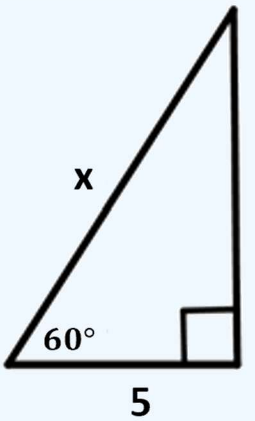
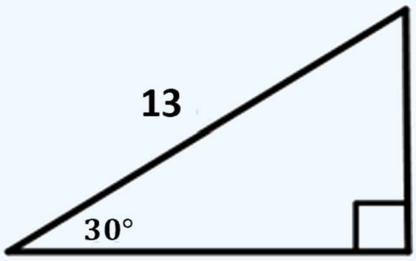
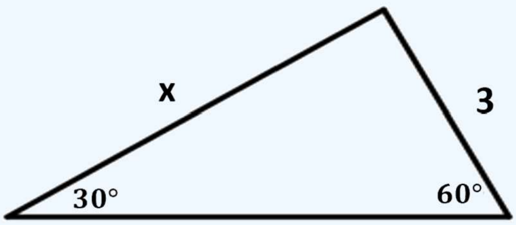
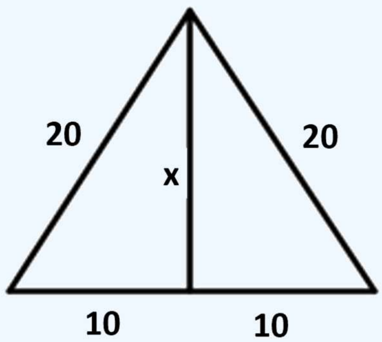
$$YZ = YX = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{2}$$

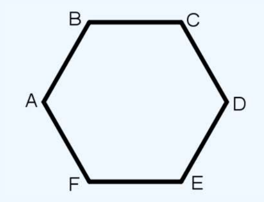
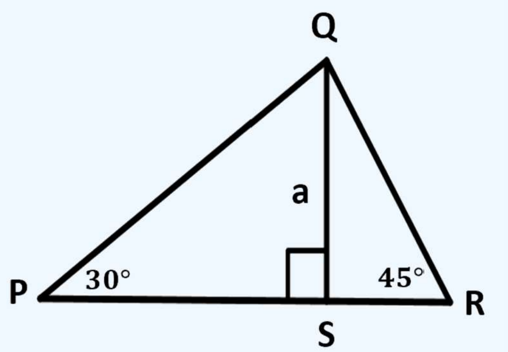
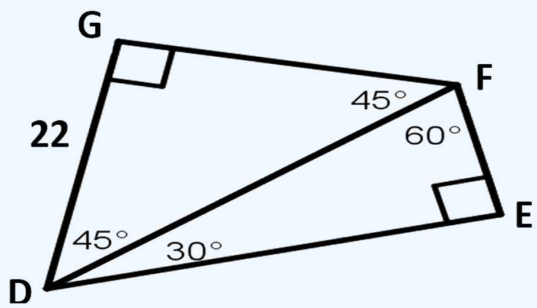
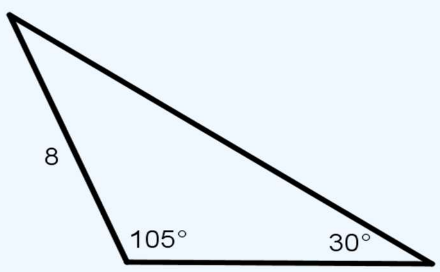


$$MK = 12, NK = \sqrt{144-36} = 6\sqrt{3}$$

تدريبات :

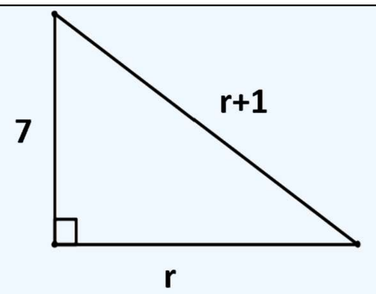
في التدريبات $(1-7)$ أوجد قيمة x

(1)		(2)	
(3)		(4)	
(5)		(6)	
(7)			

(8) على الشكل المجاور: $ABCDEF$ سداسي منتظم طول ضلعه 8 . أوجد طول AC, AD.	
(9) على الشكل المجاور: أوجد طول PQ, PS, QR بدلالة a	
(10) على الأشكال التالية أوجد أطوال القطع المجهولة إذا كان ذلك ممكننا	
(11) على الشكل المجاور: أوجد طول محيط المثلث	

تدريبات تحدّي

(1) على الشكل المجاور أوجد r



(2) المثلث القائم ABC فيه $\angle A = 90°$، $AB = AC$ ، إذا كانت النقطة D تقع على الضلع BC.

أثبت أن $BD^2 + CD^2 = 2AD^2$.

(3) إذا كان محيط مثلث قائم الزاوية يساوي 30 سم ومساحته 30 سم مربع. فأوجد أطوال أضلاع المثلث.

(4) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90°$ ، AD المنصف الداخلي للزاوية A يقطع BC في D ،

إذا كان $BD : DC = 5 : 3$ ، $AC = 9$ ، $AB = 15$. فأوجد المسافة من D إلى AB.

(5) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90°$ ، $AC = 6$ ، $BC = 12$ ،إذا كان العمود المنصف للضلع AB يقطع AB, BC في D, E على الترتيب. فأوجد طول CE.

(6) في المستطيل $ABCD$ لدينا $CE \perp DB$ عند E ، $BE = \frac{1}{4}BD$ ، $CE = 5$، فأوجد طول AC.

(7) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90°$، إذا كانت النقطة D منتصف الضلع AC ، أثبت أن $AB^2 + 3BC^2 = 4BD^2$.

(8) المثلث القائم ABC فيه $\angle C = 90°$، إذا كانت النقطتان E, D تقعان على AC, BC على الترتيب،

أثبت أن $AD^2 + BE^2 = AB^2 + DE^2$

الوحدة الثالثة : نظرية الاعداد

تدريبات للمراجعة

(1) أي من الأعداد التالية أولي: 73 و 91 و101و 143 و 199.

(2) ليكن p, q عددين أوليين مختلفين. أوجد عدد القواسم المختلفة لكل من الأعداد التالية:

$A)\ pq$ $\quad B)\ p^2q$ $\quad C)\ p^2q^2$ $\quad D)\ p^nq^m$

(3) اثبت أن حاصل ضرب أي ثلاثة أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 6.

(4) اثبت أن حاصل ضرب أي خمس أعداد طبيعية متتالية:

a) يقبل القسمة على 30.

b) يقبل القسمة على 120.

(5) أوجد أصغر عدد طبيعي n بحيث $n!$ يقبل القسمة على 660

(6) كم عدد الأصفار المتجاورة ابتداءً من رقم الآحاد التي توجد في التمثيل العشري للعدد $10!$؟

(7) ليكن n عدد طبيعي. هل يمكن أن يكون هناك 5 أصفار متجاورة بالضبط إبتداءاً من رقم الآحاد في التمثيل العشري للعدد $n!$ ؟

(8) أوجد كل الحلول الطبيعية للمعادلة:

$$x^2 - y^2 = 33$$

القاسم المشترك الأكبر (gcd)

تعريف:

إذا كان a, b, c أعداد طبيعية بحيث $a \times b = c$ ، فيقال أن a يقسم c ونرمز لها $a|c$ أيضاً، $b|c$ ، كما يقال أيضًا العددين a, b قاسمان (أو عاملان) للعدد c بينما يقال أن العدد c مضاعف للعددين a, b.

تعريف:

القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين a, b هو أكبر عدد يقسم كلا العددين a, b

ولكن كيف نحسب القاسم المشترك الأكبر للعدين a, b عمليًا؟

مثال 1:

احسب $gcd\ (6,8)$

الحل:

نحسب قواسم العددين 6 و8 كالتالي:

$$d_6 = \{1,2,3,6\}$$

$$d_8 = \{1,2,4,8\}$$

ثم نحسب القواسم المشتركة لهما وهي

$$d_6 \cap d_8 = \{1,2\}$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 6 و8 هو 2.

طريقة أخرى لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددين:

قد يستغرق إيجاد جميع قواسم عددٍ ما وقتًا طويلًا، خاصة إذا كان العدد كبيرًا؛ لذا نستخدم **التحليل إلى العوامل الأولية**؛ لأنه طريقة أكثر كفاءة في إيجاد القاسم المشترك الأكبر.

وتعتمد هذه الطريقة على:

- تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية
- تحديد العوامل الأولية المشتركة بين العددين
- أخذ **أصغر قوة** لكل عامل مشترك
- ضرب هذه العوامل لإيجاد القاسم المشترك الأكبر

ويوضح المثال التالي كيفية تطبيق هذه الطريقة.

مثال 2 :

احسب $gcd\ (36,48)$

الحل:

نقوم بتحليل العددين لعواملهما الأولية كالتالي :

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

ويصبح لدينا

$36 = 2^2.3^2$ ،

$48 = 2^4.3$

وبالتالي

$gcd\ (36,48) = 2^2.3 = 12$.

تدريبات:

احسب:

$gcd\ (8,9)$(1)

$gcd\ (54,96)$(2)

$gcd\ (35,91)$(3)

$gcd\ (6,54)$(4)

$gcd\ (199,256)$(5)

(6)إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين n و 120 يساوي 24. فأي مما يلي يمكن أن يكون تحليلًا للعدد n ؟

$A)\ 2 \times 3^3$ $B)\ 2^2 \times 3^3$ $C)\ 2^3 \times 3^2 \times 11$ $D)\ 2^4 \times 3^3 \times 5$

المضاعف المشترك الأصغر(lcm)

تعريف:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين (a,b) هو أصغر مضاعف لكلا العددين (a,b).

مثال 1:

احسب $lcm\ (6,8)$

الحل:

نحسب مضاعفات العددين 6 و 8 كالتالي:

$$m_6 = \{6,12,18,24,30,36,42,48,......\}, m_8 = \{8,16,24,32,40,48,....\}$$

ثم نحسب المضاعفات المشتركة لهما وهي $m_6 \cap m_8 = \{24,48,72,......\}$

إذن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 6 و8 هو 24.

طريقة أخرى لحساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين:

نلاحظ أن مضاعفات أي عدد طبيعي هي مجموعة غير منتهية، وقد يكون من الصعب كتابة عدد كبير من المضاعفات لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر، خاصةً في حالة الأعداد الكبيرة؛ لذلك نستخدم **طريقة التحليل إلى العوامل الأولية**؛ لأنها أكثر كفاءة.

وتعتمد هذه الطريقة على:

- تحليل كل عدد إلى عوامله الأولية
- تحديد **جميع** العوامل الأولية الموجودة في العددين
- اختيار **أكبر قوة** لكل عامل أولي
- ضرب هذه العوامل للحصول على المضاعف المشترك الأصغر

ويوضح المثال التالي كيفية تطبيق هذه الطريقة.

مثال 2:

احسب $lcm\ (36,48)$

الحل:

نقوم بتحليل العددين لعواملهما الأولية كالتالي :

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array}$$

ويصبح لدينا (c) ، وبالتالي

$$36 = 2^2.3^2$$
$$48 = 2^4.3$$

$$lcm(36,48) = 2^4.3^2 = 144$$

تدريبات (2):

احسب:

$lcm\ (8,9)(1)$

$lcm\ (54,96)(2)$

$lcm\ (35,91)(3)$

$lcm\ (6,54)(4)$

$lcm\ (199,256)(5)$

(6) إذا كان المضاعف المشترك الأصغر للعددين n و 20 يساوي 180. فأي مما يلي يمكن أن يكون تحليلًا للعدد n ؟

$D)\ 2^4 \times 3^3 \times 5$ $\quad C)\ 2^3 \times 3^2$ $\quad B)\ 2^2 \times 3^2$ $\quad A)\ 2 \times 3^3$

قاعدة مهمة:

إذا كان a, b عددين طبيعيين ، d هو القاسم المشترك الأكبر لهما، m هو المضاعف المشترك الأصغر لهما، فإن:

$m \cdot d = a \cdot b$

مثال 1:

إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين n و 8 يساوي 2 ، والمضاعف المشترك الأصغر لهما هو 24. فما قيمة n ؟

الحل:

$$8n = 2 \times 24$$

$$\Longrightarrow 8n = 48 \Longrightarrow n = 6$$

العدد المربع الكامل:

هو عدد صحيح موجب كل قواسمه الأولية قواها زوجية.

مثلاً:

العدد A صيغته الأولية على الصورة $p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}....p_n^{\alpha_n}$ فإن A مربع كامل إذا وفقط إذا كان:

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ أعداد زوجية.

مثال 2:

أي الأعداد التالية مربع كامل:

$$144,\ 128,\ 1024,\ 360$$

الحل:

بالتحليل نجد أن 144,1024 قوى عواملها الأولية زوجية فهي مربعات كاملة، بينما 360 , 128 بعض قوى عواملها الأولية فردية (وضح بنفسك)!

تدريبات :

(1) إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين n و 18 يساوي 6، المضاعف المشترك الأصغر لهما هو 36. فما قيمة n ؟

(2) أي الأعداد التالية مربع كامل:

$$196,\ \ 192,\ \ 169,\ \ 240$$

(3) **تحدي:** هل يمكن لعدد صحيح موجب مكون من 300 خانة بها 100 صفر، 100 واحد، 100 اثنين أن يكون مربعاً كاملاً؟

(4) **تحدي:** أثبت أن العدد الذي عدد قواسمه فردية يجب أن يكون مربعاً كاملاً.

(5) **تحدي:** أثبت لأي عددين صحيحين a , b موجبين والقاسم المشترك الأكبر لهما d، و المضاعف المشترك الأصغر لهما m ، فإن $m \cdot d = a \cdot b$.

الوحدة الرابعة : التركيبـــــات

التوافيق

التوافيق: عدد طرق اختيار r من الأشياء من مجموعة بها n من الاشياء بدون مراعاة الترتيب وبدون تكرار

يساوي $\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$ ويرمز لهذا العدد بالرمز $_nC_r$ أو $\binom{n}{r}$

(1) يرغب 5 من أعضاء الفريق السعودي في اختيار 2 منهم عشوائيا لتكوين لجنة نظام. بكم طريقة يمكنهم عمل ذلك؟

خواص التوافيق و التباديل

أحسب ما يلي وأكتب ملاحظاتك

$(6)!$ (a و $2!+4!$ (b $_7P_3$ و $\frac{7!}{4!}$ (c $_8P_3$ و $3!\cdot\binom{8}{3}$ (d $\binom{8}{3}$ و $\binom{8}{5}$

ملاحظة: من الفقرة a) في المثال السابق نجد أن $(2+4)! \neq 2!+4!$

لنستنتج أن العبارة $(n+m)! \neq n!+m!$ ليست صحيحة دائما.

ومن الفقرات b, c, d نلاحظ تساوي بين المقادير:

$$_7P_3 = \frac{7!}{4!} \text{ ؛ } {}_8P_3 = 3!\cdot\binom{8}{3} \text{ و } \binom{8}{5} = \binom{8}{8-5} = \binom{8}{3}$$

وسنجد لاحقاً أن هذه العلاقات صحيح دائماً لأي عددين صحيحين موجبين m, n بحيث $m \leq n$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

$$_nP_m = m!\cdot\binom{n}{m}$$

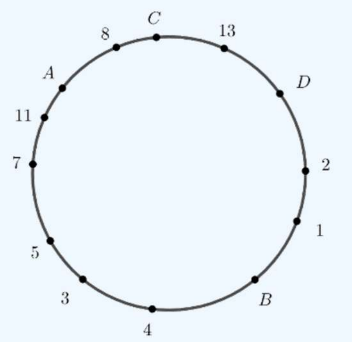
$$n! = n\cdot(n-1)!$$

تدريبات:

(2) كم عدد الكلمات المختلفة الناتجة من إعادة ترتيب حروف كلمة $ELEMENTARY$ والتي لا يظهر فيها أي حرفين E متجاورين؟

(3) كم عدد الكلمات المختلفة المكونة من 10 حروف التي تحوي فقط الحرفين E و F بحيث يكون عدد حروف E أكثر من عدد حروف F في الكلمة؟

(4) تم تسمية نقاط على محيط دائرة كما في الشكل. سوف نرسم اوتار في الدائرة بشرط أن:



1– نرسم وتر بين أي نقطتين أسم كل منها حرف.

2– نرسم بين أي نقطتين أسم كل منها عدد فردي.

3– نرسم بين أي نقطتين أسم كل منها عدد زوجي

كم عدد الوتار الممكن رسمها؟

(5) بكم طريقة يمكن تقسيم 8 طلاب إلى:

a) مجموعتين متمايزتين في كل منها 3 طلاب ويبقى طالبين لا نضعهما في أي مجموعة؟

(ملاحظة المجموعات غير متمايزة في الاربع فقرات التالية)

b) مجموعتين في كل منها 4 طلاب؟

c) أربع مجموعات من طالبين؟

d) مجموعة من أربع طلاب ومجموعتين من طالبين؟

e) مجموعة من أربع طلاب ومجموعة من ثلاث طلاب ويتبقى طالب لا نضعه في أي مجموعة؟

(6) يريد اسامة ان يجلس مع عشرة من أصدقائه حول دائرة مستديرة. كم عدد الازواج المختلفة من أصدقاء اسامة يمكن أن يجاوروه؟

تمارين متنوعة على مبادئ العد

(1) لدينا ثلاث غرف الأولى تتسع لشخص واحد والثانية لشخصين والثالثة لأربعة أشخاص. إذا أردنا تسكين 7 طلاب في هذه الغرف الثلاث فبكم طريقة مختلفة يمكن عمل ذلك؟

(2) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات العشر خانات التي تحوي على الأقل خانتين متطابقتين؟

(3) كم عدد الكلمات الممكن تكوينها والتي تحوي بالضبط خمسة تكرارات من الحرف A وعلى الأكثر ثلاثة تكرارات من الحرف B ولا تحوي حروف أخرى؟

(4) هل يشكل عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات السبع خانات والتي لا تحوي الخانة "1" نصف عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات السبع خانات؟

(5) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات 10 خانات والتي تحقق أن مجموع خاناتها عدد زوجي؟

(6) بكم طريقة يمكن وضع 4 قلاع متماثلة (كلها من نفس اللون) على لوحة الشطرنج بشرط ألا يتقاتل أي اثنين منهم؟

(7) لدينا 6 كتب مختلفة نريد ترتيبها على رف، بشرط أن يكون كتابان معيّنان (مثلًا A و B) متجاورين دائمًا. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب؟

(8) كم عدد الطرق لاختيار لجنة مكوّنة من 3 أشخاص من بين 10 أشخاص، بشرط أن يكون جواد عضوًا في اللجنة؟

الترتيب التصاعدي والتنازلي

في هذا في هذا الدرس نتعلّم كيفية عدّ الأعداد عندما تكون أرقامها مرتّبة ترتيبًا **تصاعديًا** أو **تنازليًا**، وسنلاحظ أن هذا الترتيب يؤثر على عدد الاحتمالات. كما سنطبّق ذلك من خلال أمثلة وتمارين متنوعة على الأعداد.

مثال 1:

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 4 خانات مأخوذة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بحيث تكون مرتبة تصاعدياً ؟

الحل :

لدينا الأرقام:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نريد تكوين **عدد من 4 أرقام** بحيث تكون الأرقام:

- مأخوذة من هذه المجموعة
- مرتبة تصاعديًا

ملاحظة مهمة: الترتيب التصاعدي أو التنازلي يعني **لا يوجد تكرار**، لأن الأرقام يجب أن تكون مختلفة.

عندما تكون الأرقام **مرتبة تصاعديًا**، فهذا يعني:

- نختار 4 أرقام مختلفة من أصل 6
- **الترتيب يصبح تلقائيًا محددًا** (من الأصغر إلى الأكبر)

إذن تتحول المسألة إلى: كم طريقة نختار بها 4 أرقام من 6 دون اعتبار للترتيب؟

وهذا هو تعريف **التوافيق**

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

ماذا لو كانت المجموعة تحتوي على الصفر؟

ما الاختلاف الذي سيظهر في الحل؟

نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال 2:

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 4 خانات مأخوذة من $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ بحيث تكون مرتبة تصاعدياً

الحل :

المجموعة هي $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

نريد تكوين **عدد من 4 خانات** بحيث تكون الأرقام **مرتبة تصاعديًا**

ملاحظة مهمة :

قولنا **"عدد من 4 خانات "**يعني **عددًا رباعيًّا**، أي أن:

- الرقم الأول **لا يمكن أن يكون صفراً**.

وبما أن العدد **مرتّب تصاعديًا**:

فإن الرقم الأول يمثل أصغر رقم في العدد.

إذن لا يمكن استخدام الصفر، لأنه لو استُخدم لاحتل الخانة الأولى، مما يجعل العدد غير رباعي.

إذن نستبعد الصفر، فتصبح المجموعة: $\{1,2,3,4,5,6\}$

وعندئذٍ:

- نختار فقط 4 أرقام من أصل 6
- ويكون ترتيبها تصاعديًا محددًا تلقائيًا.

لذلك نستخدم التوافيق كما في المثال السابق. $\binom{6}{4}$

الخلاصة:

نستنتج مما سبق أنه عند كون الترتيب **تصاعديًا** فإن وجود الصفر يؤثر في الحل، لأنه يمثل أصغر رقم ويشغل الخانة الأولى، مما يؤدي إلى عدم تكوّن عدد بعدد خانات محدد، لذلك يجب استبعاده عند الاختيار.

أما إذا كان الترتيب **تنازليًا** فإن طريقة الحل تبقى نفسها، ولا يؤثر وجود الصفر من عدمه، لأن الخانة الأولى تكون مشغولة بأكبر رقم، ولا يمكن أن يكون الصفر فيها.

تدريبات:

(1) كم عدد من الأعداد $100,101,....,999$ أرقامه الثلاثة في ترتيب تصاعدي أو تنازلي من اليسار؟

(2) بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 5 خانات مأخوذة من $\{6,7,8\ ,5\ ,4\ ,3\ ,2\ ,1\}$ بحيث تكون:

a) مرتبة تصاعدياً.

b) مرتبة تنازلياً.

(3) بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 4 خانات مأخوذة من $\{6,7,8\ ,5\ ,4\ ,3\ ,2\ ,1\ ,0\}$ بحيث تكون:

a) مرتبة تصاعدياً.

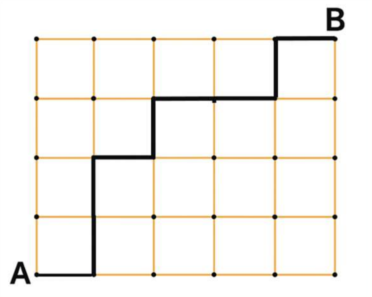
b) مرتبة تنازلياً.

(4) لدى محمد عشر كروت مرقمة من 1 إلى 10 وسيلعب مع أخيه سالم بإن يسحب سالم ثلاث كروت بشكل متلاحق وبدون ارجاع. سيفوز سالم إذا سحب 3 كروت تحمل أعداد مرتبة تصاعديا وإلا سيفوز محمد في اللعبة. فمن هو صاحب حظ الفوز أكثر سالم أو محمد. وكم نسبة فوز أحدهم على الأخر؟

عدد المسارات على شبكة

مثال:

لدينا شبكة من النوع 5×4 كم عدد المسارات على الشبكة من النقطة A الى النقطة B والتي في اتجاه الاعلى و الى اليمين فقط ؟



الحل :

نرمز لعدد الحركات الى الأعلى U والحركات الى اليمين R

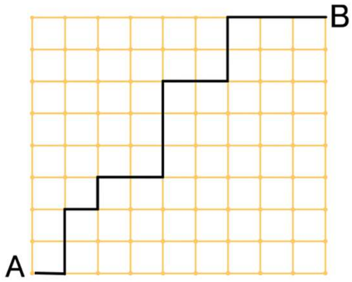
للتحرك من النقطة A الى النقطة B فقط للأعلى أو لليمين نحتاج 4 حركات للأعلى و 5 حركات الى اليمين , اي

تسلسل مثل $UUUURRRRR$, المجموع = 4 + 5 = 9

عدد طرق ترتيبهم = $\frac{9!}{4! \times 5!}$ ويمكن حلها أيضا بحساب عدد طرق اختيار 4 أماكن من 9 أماكن لوضع U

وتساوي $126 = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}$

وبشكل عام إذا كان لدينا شبكة من نوع $m \times n$ كما في الشكل

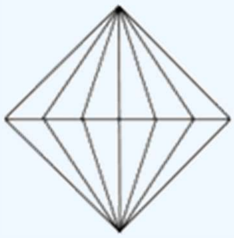


عدد المسارات الأقصر للوصول من A إلى B على الشبكة $m \times n$ يساوي $\binom{m+n}{m}$

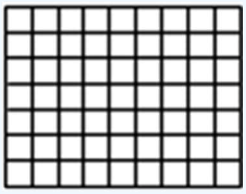
تدريبات:

(1) يقف ضفدع عند نقطة الأصل (0) على المحور السيني، ويقفز في كل مرة خطوة واحدة إمّا إلى الأمام أو إلى الخلف . إذا قفز الضفدع 13 خطوة، فبكم طريقة يمكن أن ينتهي به المطاف عند النقطة 1−

(2) كم عدد المثلثات في الشكل التالي:



(3) كم عدد المستطيلات في الشكل التالي؟



(4) لوحة سيارات مدينة ما (بدءاً من اليسار) تتكون من حرفين مرتبين أبجديا ويتبعهما خانتين مرتبتين تصاعدياً مثلا RE64. إذا لم نستخدم الحرف O ولم نستخدم العدد 0، فكم عدد اللوحات المختلفة في هذه المدينة؟

(5) على باب ثلاجة يوجد 9 قطع مغناطيس مكتوب على كل واحدة منها حروف من أحرف الكلمة MATHCOUNT سنأخذ حرفين عله وثلاث أحرف ساكنه منها ونضعها في كيس وبفرض أن حرفي T غير متمايزين، كم عدد الإمكانيات المختلفة الموجودة في الكيس من الأحرف؟

حلول التدريبات

حلول (الجبر)

متطابقتي مربع مجموع والفرق بين عددين:

(1)

في كل بند نضيف الحدّ المناسب ليصبح المقدار **مربعًا كاملًا** باستخدام قاعدة:

$$x^2 \pm bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{b}{2}\right)^2$$

$(a)\ x^2 - 6x + 9$

$(b)\ x^2 + 7x + \frac{49}{4}$

$(c)\ x^2 - 0.4x + 0.04$

$(d)\ x^2 - 13x + 42.25$

(2)

$(a)\ (y+5)^2 = y^2 + 10y + 25$

$(b)\ (3z+8)^2 = 9z^2 + 48z + 64$

$(c)\ (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36$

$(d)\ (-2y+9)^2 = 4y^2 - 36y + 81$

$(e)\ (-x-9y)^2 = x^2 + 18xy + 81y^2$

$(f)\ (2r - \frac{2}{r})^2 = 4r^2 - 8 + \frac{4}{r^2}$

(3)

$5l^2 - 20l = 0$

$\Longrightarrow 5l(l-4) = 0$

$\Longrightarrow 5l = 0 \quad or \quad l - 4 = 0$

$\Longrightarrow l = 0 \quad or \quad l = 4$

(4)

$l^2 - 144 = 0$

$\Longrightarrow l^2 - 12^2 = 0$

$\Longrightarrow (l-12)(l+12) = 0$

$\Longrightarrow l - 12 = 0 \quad or \quad l + 12 = 0$

$\Longrightarrow l = \pm 12$

(5)

$29 = (w-2)^2 - 7$

$\Longrightarrow (w-2)^2 = 36$

$\Longrightarrow w - 2 = 6 \quad or \quad w - 2 = -6$

$\Longrightarrow w = 8 \quad or \quad w = -6$

(6)

$94 - 5(v-3)^2 = 14$

$\Longrightarrow 5(v-3)^2 = 80$

$\Longrightarrow (v-3)^2 = 16$

$\Longrightarrow v - 3 = 4 \quad or \quad v - 3 = -4$

$\Longrightarrow v = 7 \quad or \quad v = -1$

(7)

$3(4+e)^2 - 40 = 68$

$\Longrightarrow 3(4+e)^2 = 108$

$\Longrightarrow (4+e)^2 = 36$

$\Longrightarrow 4 + e = 6 \quad or \quad 4 + e = -6$

$\Longrightarrow e = 2 \quad or \quad e = -10$

(8)

$m^2 - 6m + 9 = 0$

$\Longrightarrow (m-3)^2 = 0$

$\Longrightarrow m - 3 = 0$

$\Longrightarrow m=3$

(9)

$a^2 + 36 = 12a$

$\Longrightarrow a^2 - 12a + 36 = 0$

$\Longrightarrow (m-6)^2 = 0$

$\Longrightarrow m - 6 = 0$

$\Longrightarrow m = 6$

(10)

$t^2 + 8t - 20 = 0$

$\Longrightarrow (t-2)(t+10) = 0$

$\Longrightarrow t - 2 = 0 \qquad or \qquad t + 10 = 0$

$\Longrightarrow t = 2 \qquad or \qquad t = -10$

(11)

$\frac{3(h-3)}{2} = \frac{27}{2h-6}$

$\Longrightarrow (h-3)(h-3) = \frac{2 \cdot 27}{2 \cdot 3}$

$\Longrightarrow (h-3)^2 = 9$

$\Longrightarrow h - 3 = 3 \qquad or \qquad h - 3 = -3$

$\Longrightarrow h = 6 \qquad or \qquad h = 0$

(12)

$\frac{3x-6}{2} = \frac{27}{8x-16}$

$\Longrightarrow (x-2)(x-2) = \frac{2 \cdot 27}{8 \cdot 3}$

$\Longrightarrow (x-2)^2 = \frac{9}{4}$

$\Longrightarrow x - 2 = \frac{3}{2} \qquad or \qquad x - 2 = -\frac{3}{2}$

$\Longrightarrow x = \frac{7}{2} \qquad or \qquad x = \frac{1}{2}$

(13)

$y^2 + 12y + 32 = 0$

$\Longrightarrow (y+8)(y+4) = 0$

$\Longrightarrow y + 8 = 0 \qquad or \qquad y + 4 = 0$

$\Longrightarrow y = -8 \qquad or \qquad y = -4$

(14)

إذا كان $x - y = 8$ وَ $xy = -15$ فأوجد قيمة كل من:

$a)\ x^2 + y^2$ $\quad$ $b)\ (x+y)^2$ $\quad$ $c)\ x^4 + y^4$

$a)\ (x-y)^2 = 8^2$

$\Longrightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 64$

$\Longrightarrow x^2 - 2(-15) + y^2 = 64$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = 64 - 30 = 34$

$b)\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\Longrightarrow\ (x+y)^2 = x^2 + 2(-15) + y^2$

$\Longrightarrow\ (x+y)^2 = x^2 + y^2 - 30$

$\Longrightarrow\ (x+y)^2 = 34 - 30 = 4$

$c)\ (x^2 + y^2)^2 = 34^2$

$\Longrightarrow x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = 34^2$

$\Longrightarrow x^4 + y^4 = 1156 - 450 = 706$

(15)

أولًا نحسب:

$$x - y = 2025^{1447} - 2025^{-144}\ \ - 2025^{1447} - 2025^{-1447} = -\frac{2}{2025^{1447}}$$

ثانيًا نحسب:

$$x + y = 2025^{1447} - 2025^{-1447} + 2025^{1447} + 2025^{-1447} = 2 \cdot 2025^{1447}$$

$$\because x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$\therefore x^2 - y^2 = \left(-\frac{2}{2025^{1447}}\right)(2 \cdot 2025^{1447}) = -4$$

2- معادلة الدرجة الثانية:

تدريبات:

(1)

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{x^2 - 12x - 540 = 0}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما -540 ومجموعهما -12

نجد العددين هما -30, 18

$\Longrightarrow x^2 - 12x - 540 = (x - 30)(x + 18) = 0$

$\Longrightarrow x = 30\ or\ x = -18$

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{3x^2 = 10x + 24}$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد $\Longrightarrow 3x^2 - 10x - 24 = 0$

$a = 3, b = -10, c = -24 \Longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(3)(-24) = 100 + 288 = 388$

$$\therefore x = \frac{10 \pm \sqrt{388}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{3}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{97}}{3} \quad or \quad x = \frac{5 - \sqrt{97}}{3}$$

$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{(x^4 - 11x^3 + 24x^2) - (4x^2 - 44x + 96) = 0}$

$\Longrightarrow x^2(x^2 - 11x + 24) - 4(x^2 - 11x + 24) = 0$

$\Longrightarrow (x^2 - 11x + 24)(x^2 - 4) = 0$

$\Longrightarrow (x - 8)(x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0$

$\Longrightarrow x = 8\ or\ 3\ or\ 2\ or - 2$

(2)

$ax^2 - 5x + 9 = 0$

يكون للمعادلة حل واحد إذا كان $\Delta = 0$ أي أن:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(a)(9) = 0$

$\Longrightarrow 25 - 36a = 0$

$$\Longrightarrow a = \frac{25}{36}$$

(3)

$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$

<u>الحالة الأولى:</u> أن يكون الأس مساوياً للصفر (بشرط ألا يكون الأساس صفراً).

$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$

وعند $x = -2$ فإن الأساس لا يساوي الصفر.

<u>الحالة الثانية:</u> أن يكون الأساس مساوياً لـ 1.

$x^2 - x - 1 = 1 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 2 \; or \; x = -1$

<u>الحالة الثالثة:</u> أن يكون الأساس مساوياً لـ (-1) بشرط أن يكون الأس عدداً زوجياً.

$x^2 - x - 1 = -1 \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \; or \; x = 1$

وعند $x = 0$ فأن الأس:

$$x + 2 = 0 + 2 = 2$$

وهذا عدد زوجي، وبالتالي تكون المعادلة صحيحة.

ولكن عند $x = 1$ فأن الأس:

$$x + 2 = 1 + 2 = 3$$

وهذا عدد فردي، وبالتالي المعادلة غير صحيحة.

إذًا قيم x الصحيحة التي تجعل المعادلة صحيحة هي: $\{-2,2,-1,0\}$، وعددها أربع قيم.

(4)

نستخدم علاقات فيتا لحاصل ضرب الجذرين فبفرض أن الجذر الثاني للمعادلة:

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$$

هو r، فإن حاصل ضرب الجذرين يعطى بالعلاقة:

$$r \cdot 1 = r = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$$

(5)

بما أن a, b جذرا المعادلة $x^2 - mx + 2 = 0$ فإن:

$$ab = 2$$

بما أن $a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{a}$ جذرا المعادلة $x^2 - px + q = 0$ فإن:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + 2 + \frac{1}{ab} = q$$

$$\Longrightarrow q = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

(6)

$$\begin{cases} x^2 + xy = 39 \longrightarrow (1) \\ x - y = -33 \longrightarrow (2) \\ y + z = 13 \longrightarrow (3) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نجد $y = x + 33$ ، وبالتعويض في (1) نحصل على:

$$x^2 + x(x + 33) = 39$$
$$\Longrightarrow x^2 + x^2 + 33x - 39 = 0$$
$$\Longrightarrow 2x^2 + 33x - 39 = 0$$

وباستخدام القانون العام نحصل على:

$$a = 2, b = 33, c = -39 \ \Longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 33^2 - 4(2)(-39) = 1401$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-33 \pm \sqrt{1401}}{2(2)}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-33 \pm \sqrt{1401}}{4}$$

بالتعويض عن قيم x في المعادلات (2), (3) نحصل على:

$$y = x + 33 \Longrightarrow y = \frac{-33 \pm \sqrt{1401}}{4} + 33 = \frac{99 \pm \sqrt{1401}}{4}$$

$$z = 13 - y \Longrightarrow z = 13 - \frac{99 \pm \sqrt{1401}}{4} = \frac{-47 \mp \sqrt{1401}}{4}$$

وبالتالي للنظام حلان:

$$\left(\frac{-33 + \sqrt{1401}}{4}, \frac{99 + \sqrt{1401}}{4}, \frac{-47 - \sqrt{1401}}{4}\right), \left(\frac{-33 - \sqrt{1401}}{4}, \frac{99 - \sqrt{1401}}{4}, \frac{-47 + \sqrt{1401}}{4}\right)$$

(7)

افرض المعادلة على الصورة $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ، وبما أن $P(0) = -1$ فإن:

$$P(0) = a(0)^2 + b(0) + c = -1 \Longrightarrow c = -1$$

وبما أن $P(1) = 9$ فإن:

$$P(1) = a(1)^2 + b(1) - 1 = 9 \Longrightarrow a + b = 10 \longrightarrow (1)$$

وبما أن $P(2) = 25$ فإن:

$$P(2) = a(2)^2 + b(2) - 1 = 25 \Longrightarrow 4a + 2b = 26 \Longrightarrow 2a + b = 13 \longrightarrow (2)$$

وبطرح (1) من (2) نحصل على:

$$a = 3 \Longrightarrow b = 7$$

إذًا:

$$P(-1) = 3(-1)^2 + 7(-1) - 1 = 3 - 7 - 1 = -5$$

(8)

ليكون للمعادلة $x^2 + kx + 27 = 0$ جذران حقيقيان ومختلفان يجب أن يكون $\Delta > 0$

$$\Delta = k^2 - 4(1)(27) = k^2 - 108 > 0$$
$$\Longrightarrow k^2 > 108 \Rightarrow |k| > \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

إذًا:

$$k > 6\sqrt{3} \quad or \quad k < -6\sqrt{3}$$

(9)

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{a+b}$$
$$\Longrightarrow (a+b)^2 = ab$$
$$\Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = ab$$
$$\Longrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0$$

وباستخدام القانون العام نحصل على:

$$\Delta = (b)^2 - 4(1)(b^2) = -3b^2$$

- إذا $b \neq 0$ فإن $\Delta < 0$ وبالتالي لا حلول حقيقية لـ a.
- إذا $b = 0$ تصبح المعادلة الأصلية $\frac{a}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow 1 = 0$ وهذا مستحيل

وبالتالي لا يمكن أن يكون كل من a, b أعداداً حقيقية.

(10)

$$(2+(2+(2+(2+x)^2)^2)^2)^2 = 15129$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين مع استبعاد القيمة السالبة لأن الطرف الأيسر موجب:

$$\Longrightarrow 2+(2+(2+(2+x)^2)^2)^2 = 123$$
$$\Longrightarrow (2+(2+(2+x)^2)^2)^2 = 121$$

نأخذ الجذر التربيعي مرة أخرى ولأن الطرف الأيسر موجب:

$$\Longrightarrow 2+(2+(2+x)^2)^2 = 11$$
$$\Longrightarrow (2+(2+x)^2)^2 = 9$$

بنفس الطريقة:

$$\Longrightarrow 2+(2+x)^2 = 3$$
$$\Longrightarrow (2+x)^2 = 1$$
$$\Longrightarrow 2+x = \pm 1$$
$$\Longrightarrow x = -1 \ \ or -3$$

(11)

لدينا $x^2 + y = 12 = y^2 + x$ ومنه:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y = y^2 + x \\
& \Longrightarrow x^2 - y^2 + y - x = 0 \\
& \Longrightarrow (x^2 - y^2) - (x - y) = 0 \\
& \Longrightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0 \\
& \Longrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0
\end{aligned}
$$

إذاً لدينا الحالتين التالية:

$\mathbf{1)\ x - y = 0}$

$\Longrightarrow x = y$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على:

$$x^2 + x = 12 \Longrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Longrightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Longrightarrow (x, y) = (-4, -4), (3,3)$$

$\mathbf{2)\ x + y - 1 = 0}$

$\Longrightarrow y = 1 - x$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على:

$$x^2 + 1 - x = 12 \Longrightarrow x^2 - x - 11 = 0$$

وباستخدام القانون العام نجد:

$$a = 1, b = -1, c = -11 \ \Longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-11) = 45$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$\Longrightarrow y = 1 - \frac{1 \pm 3\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \mp 3\sqrt{5}}{2}$$

وبالتالي فإن الحلول التي تحقق النظام هي:

$$(x, y) = (-4, -4), (3,3), \left(\frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{1 - 3\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1 - 3\sqrt{5}}{2}, \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_5^2 - 23 \\ 4x_2 = x_1^2 + 7 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}$$

بجمع المعادلات وترتيب الحدود نحصل على:

$$(x_1^2 - 2x_1) + (x_2^2 - 4x_2) + (x_3^2 - 6x_3) + (x_4^2 - 8x_4) + (x_5^2 - 10x_5) + 55 = 0$$

وبإكمال المربع لكل قوس نحصل على:

$$(x_1^2 - 2x_1 + 1) + (x_2^2 - 4x_2 + 4) + (x_3^2 - 6x_3 + 9) + (x_4^2 - 8x_4 + 16) + (x_5^2 - 10x_5 + 25) = 0$$
$$\Longrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 5)^2 = 0$$

وبما أن مجموع المربعات يساوي صفر فإن كل قوس يساوي صفر وبالتالي:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$$

حلول (الهندسة)

حلول تدريبات المراجعة:

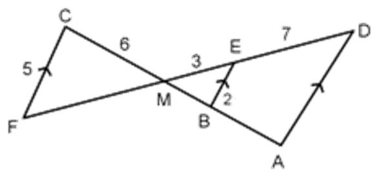
(1)

$$\frac{ME}{MF} = \frac{EB}{FC} \Longrightarrow MF = \frac{5\times3}{2} = 7.5$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{EB}{FC} \Longrightarrow MB = \frac{6 \times 2}{5} = 2.4$$

$$\frac{ME}{ED} = \frac{MB}{BA} \Longrightarrow BA = \frac{7 \times 2.4}{3} = 5.6$$

$$\frac{BE}{AD} = \frac{ME}{MD} \Longrightarrow AD = \frac{2 \times 10}{3} = \frac{20}{3}$$

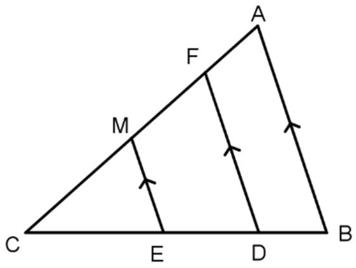


(2)

$$\frac{MC}{EC} = \frac{MF}{ED} \Longrightarrow CE = \frac{5 \times 7.5}{3} = 12.5$$

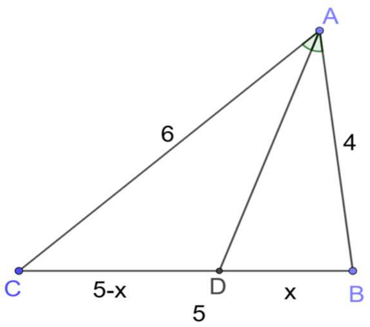
$$\frac{AF}{DB} = \frac{MF}{ED} \Longrightarrow DB = \frac{2 \times 7.5}{3} = 5$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{2}{10} \Longrightarrow AC = \frac{4 \times 10}{2} = 20$$

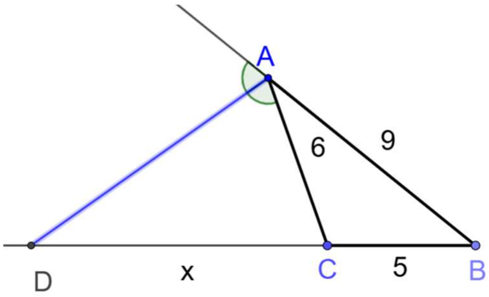


(3)

$$\frac{4}{6} = \frac{BD}{DC} \Longrightarrow \frac{4}{6} = \frac{x}{5-x}$$
$$\Longrightarrow BD = x = 2$$



(4)

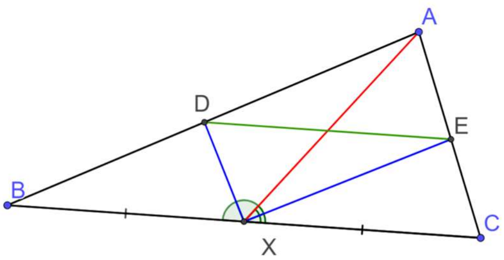


$$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}\Longrightarrow\frac{9}{6}=\frac{5+x}{x}$$

$$\Longrightarrow 9x=30+6x\Longrightarrow x=10$$

$$\Longrightarrow DC=10\,,BD=15$$

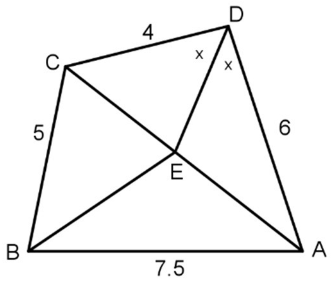
(5)



$$\frac{AX}{XC}=\frac{AE}{EC}\quad(1)\quad\frac{AX}{XB}=\frac{AD}{DB}\quad(2)$$

$$XB=XC\Longrightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}\Longrightarrow ED\parallel BC$$

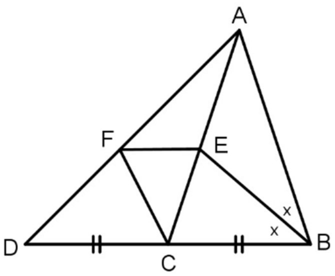
(6)



$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DC}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\quad(1)\quad\frac{AB}{BC}=\frac{7.5}{5}=\frac{3}{2}\quad(2)\quad(1),(2)\Longrightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}$$

من عكس نظرية منصف الزاوية يكون BE منصف للزاوية $\angle ABC$

(7)



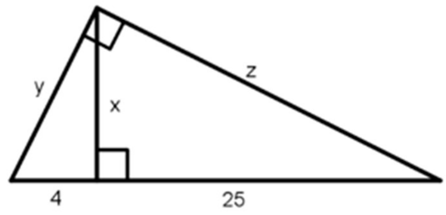
حيث $BC=DC$, $AB=AC$ ، وباستخدام نظرية منصف الزاوية $\angle ABC$

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{AC}{DC}\quad(1)\quad\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{FD}\quad(2)\quad(1),(2)\Longrightarrow\frac{AF}{FD}=\frac{AC}{DC}$$

من عكس نظرية منصف الزاوية يكون CF منصف للزاوية $\angle ACD$

حلول تدريبات فيثاغورس:

(1)

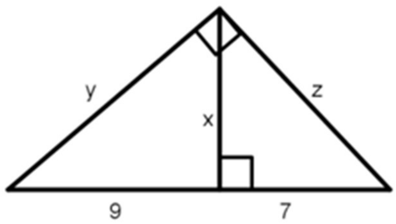


$$x^2 = 4 \times 25 \Longrightarrow x = 10$$

$$y^2 = 4 \times 29 \Longrightarrow y = 2\sqrt{29}$$

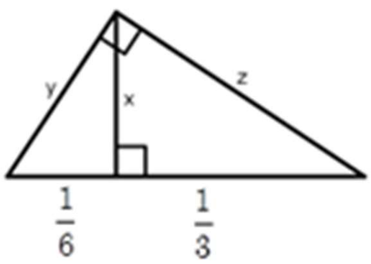
$$z^2 = 29 \times 25 \Longrightarrow z = 5\sqrt{29}$$

(2)



$$x^2 = 7 \times 9 \Longrightarrow x = 3\sqrt{7}$$
$$y^2 = 9 \times 16 \Longrightarrow y = 12$$
$$z^2 = 7 \times 16 \Longrightarrow z = 4\sqrt{7}$$

(3)

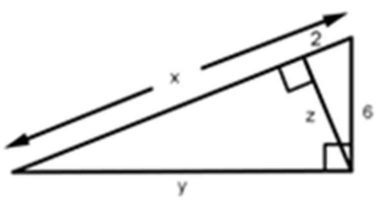


$$x^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$y^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$z^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \Longrightarrow z = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

(4)

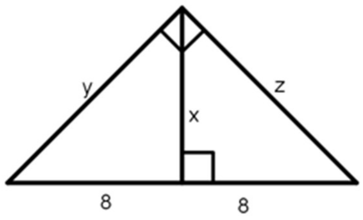


$$6^2 = 2 \times x \Longrightarrow x = 18$$

$$y^2 = 18 \times 16 \Longrightarrow y = 12\sqrt{2}$$

$$z^2 = 2 \times 16 \Longrightarrow z = 4\sqrt{2}$$

(5)

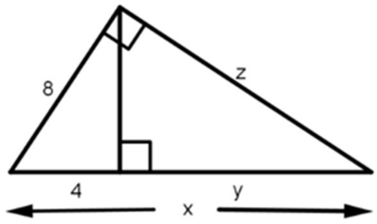


$$x^2 = 8 \times 8 \Longrightarrow x = 8$$

$$y^2 = 8 \times 16 \Longrightarrow y = 8\sqrt{2}$$

$$z = y = 8\sqrt{2}$$

(6)

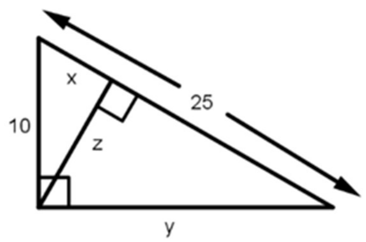


$$8^2 = 4 \times x \Longrightarrow x = 16$$

$$y = 16 - 4 \Longrightarrow y = 12$$

$$z^2 = 12 \times 16 \Longrightarrow z = 8\sqrt{3}$$

(7)



$$10^2 = x \times 25 \Longrightarrow x = 4$$

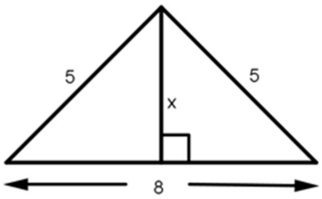
$$y^2 = 21 \times 25 \Longrightarrow y = 5\sqrt{21}$$

$$z^2 = 4 \times 21 \Longrightarrow z = 2\sqrt{21}$$

(8 – 11)

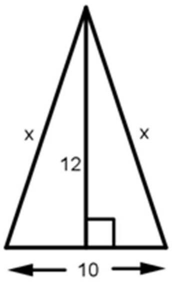
التدريب	ضلع المربع	قطر المربع
(8)	2	$2\sqrt{2}$
(9)	10	$10\sqrt{2}$
(10)	$20k$	$20k\sqrt{2}$
(11)	$7n\sqrt{2}$	$14n$

(12)



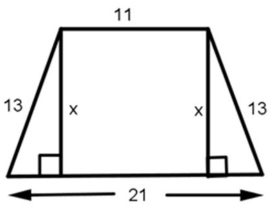
$$x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

(13)



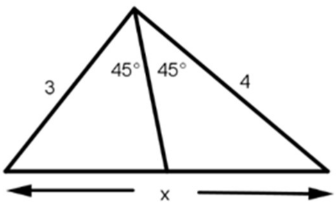
$$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

(14)



$$x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

(15)



$$x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

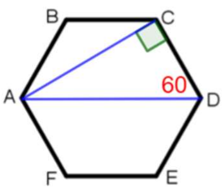
حلول تدريبات المثلثات الخاصة:

$(1-7)$

قيمة x	رقم التدريب
$6\sqrt{2}$	1
10	2
$6\sqrt{2}$	3
10	4
6.5	5
$3\sqrt{3}$	6
$10\sqrt{3}$	7

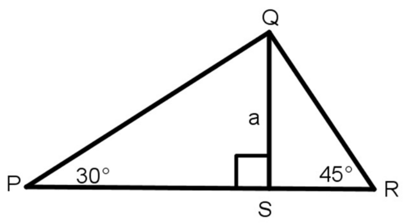
(8)

$$AC = 8\sqrt{3}$$
$$AD = 16$$



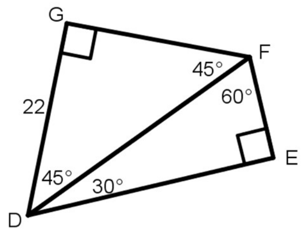
(9)

$$QR = a\sqrt{2}$$
$$PS = a\sqrt{3}$$
$$PQ = 2a$$



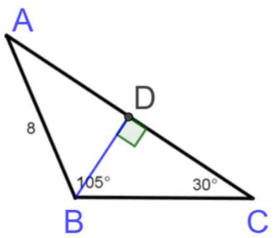
(10)

$$GF=22DF=22\sqrt{2}FE=11\sqrt{2}ED=11\sqrt{6}$$



(11)

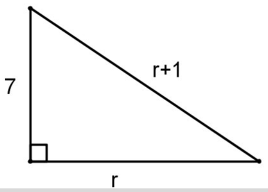
$$AB=8\ \ ,\ \ AD=4\sqrt{2}\ \ ,\ \ BD=4\sqrt{2}BC$$
$$=8\sqrt{2}\ \ ,\ \ DC=4\sqrt{6}\Longrightarrow \text{المحيط}$$
$$=8+12\sqrt{2}+4\sqrt{6}$$



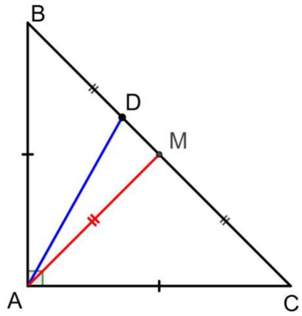
حلول تدريبات التحدي:

(1)

$$(r+1)^2 = r^2 + 7^2 \Longrightarrow r = 24$$



(2)



نرسم عمود من A على الوتر BC ومن خواص المثلث متطابق الضلعين سيقطع BC في منتصفها عند النقطة M

ومن خواص المتوسط على الوتر في المثلث قائم الزاوية سيكون

$$AM = CM = BM$$

$$BD^2 + CD^2 = (BM - MD)^2 + (CM + MD)^2$$
$$= BM^2 + MD^2 - 2BM \cdot MD + CM^2 + MD^2 + 2CM$$
$$\cdot MD = 2(AM^2 + MD^2) = 2AD^2$$

(3)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{1}{2} a \cdot b = 30 \Longrightarrow a \cdot b = 60a + b + c = 30 \Longrightarrow a + b = 30 - c$$

$$\Longrightarrow (a+b)^2 = (30-c)^2 \Longrightarrow a^2 + b^2 + 2a \cdot b$$

$$= 900 + c^2 - 60c \Longrightarrow c^2 + 2 \cdot 60 = 900 + c^2 - 60c$$

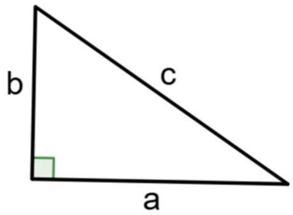
$$\Longrightarrow 120 = 900 - 60c \Longrightarrow c = 13a \cdot b = 60 \ \Longrightarrow b$$

$$= \frac{60}{a} a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow a^2 + \left(\frac{60}{a}\right)^2 = 13^2$$

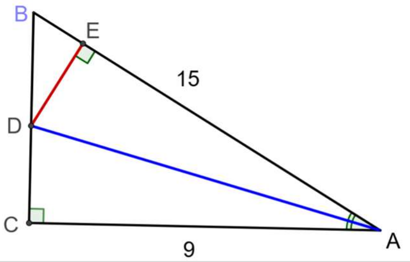
$$\Longrightarrow a^4 - 169a^2 + 3600 = 0 \Longrightarrow (a^2 - 25)(a^2 - 144)$$

$$= 0 \Longrightarrow a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5\,, b = 12 or\ a^2 = 144 \Longrightarrow a$$

$$= 12 \ \ , b = 5$$



(4)



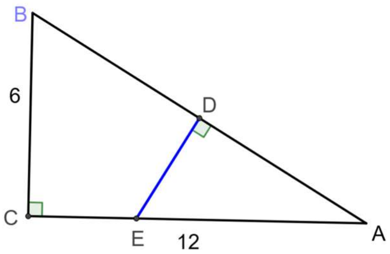
$$BC = \sqrt{225-81} = 12$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{5} = \frac{BD}{12-BD} \Longrightarrow BD = 4.5\ , \qquad CD = 7.5$$

$$\Delta ADE \cong \Delta ADC\ \ (ASA)$$

$$\Longrightarrow DE = DC = 4.5$$

(5)



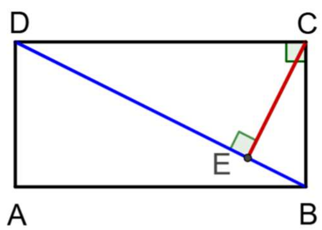
$$AB = \sqrt{144+36} = 6\sqrt{5} \Longrightarrow AD = DB = 3\sqrt{5}$$

$$\Delta ADE \sim \Delta ACB\ \ (AA)$$

$$\Longrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \Longrightarrow \frac{3\sqrt{5}}{12} = \frac{AE}{6\sqrt{5}} \Longrightarrow AE = 7.5$$

$$\Longrightarrow CE = 12 - 7.5 \Longrightarrow CE = 4.5$$

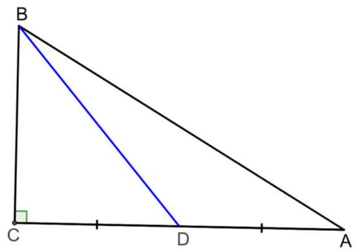
(6)



$$CE^2 = BE \cdot DE \Longrightarrow 25 = \frac{1}{4}BD \cdot \frac{3}{4}BD$$

$$\Longrightarrow BD = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

(7)



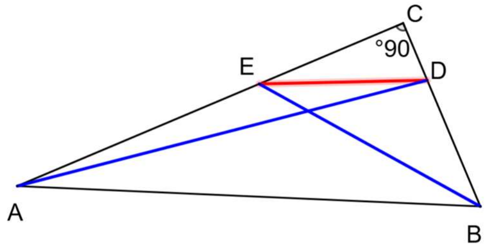
$$AB = 2CD$$

$$AB^2 + 3BC^2 = BC^2 + (2CD)^2 + 3BC^2$$

$$= 4(BC^2 + CD^2) = 4BD^2$$

(8)

$BC^2 + CE^2 = BE^2 \; AC^2 + CD^2 = AD^2 \}$ (1)
$CD^2 + CE^2 = ED^2 \; AC^2 + BC^2 = AB^2 \}$ (2)



بمقارنة مجموع (1) مع مجموع (2)

نجد أن $AD^2 + BE^2 = AB^2 + DE^2$

حلول (نظرية الاعداد)

تدريبات للمراجعة:

(1)

73 عدد أولي.

91 عدد مؤلف لأنه حاصل ضرب 7×13.

101 عدد أولي.

143 عدد مؤلف لأنه حاصل ضرب 11×13.

199 عدد أولي.

(2)

من قانون عدد القواسم:

$A)\ (1+1)(1+1) = 4$

$B)\ (2+1)(1+1) = 6$

$C)\ (2+1)(2+1) = 9$

$D)\ (m+1)(n+1)$

$= mn + m + n + 1$

(3)

لاحظ أنه في أي ثلاثة اعداد طبيعية متتالية، هناك عدد منها زوجي وعدد يقبل القسمة على 3 (من الممكن أنهم نفس العدد). إذاً حاصل الضرب يجب أن يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل على 2,3 معًا.

(4)

a) نحلل $30 = 2 \times 3 \times 5$

يجب أن نثبت أن حاصل الضرب يقبل القسمة على 2□3□5 معاً.

- **القسمة على 5:** في أي سلسلة من خمسة أعداد طبيعية متتالية، يجب أن يظهر عدد واحد بالضبط يقبل القسمة على 5.
- **القسمة على 3:** في أي سلسلة من ثلاثة أعداد طبيعية متتالية، يجب أن يظهر عدد واحد بالضبط يقبل القسمة على 3. بما أن لدينا خمسة أعداد، فالشرط محقق.
- **القسمة على 2:** في أي سلسلة من عددين طبيعيين متتاليين، يجب أن يظهر عدد واحد بالضبط يقبل القسمة على 2. بما أن لدينا خمسة أعداد، فالشرط محقق.

وبما أن حاصل الضرب يقبل القسمة على 2 و 3 و 5، فإنه يقبل القسمة على $2 \times 3 \times 5 = 30$

b) نحلل $120 = 2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5$

نحن نعلم مسبقاً أنه يقبل القسمة على 3 و 5 (كما في المطلوب في الفقرة السابقة). علينا إثبات أنه يقبل القسمة على 8.

في أي سلسلة من أربعة أعداد متتالية، يوجد على الأقل مضاعف للعدد 4 ومضاعف للعدد 2 (فردي، زوجي، فردي، زوجي) أو مضاعف للعدد 8.

وبالتالي، فإن حاصل الضرب يقبل القسمة على $120 = 8 \times 3 \times 5$

(5)

نحلل العدد 660 إلى عوامله الأولية: $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$

لكي يقبل $n!$ القسمة على 660 ، يجب أن يظهر كل عامل أولي في تحلل 660 كعامل في $n!$

- **لضمان العامل** 11: يجب أن يكون $n \geq 11$
- **لضمان العامل** 5: يجب أن يكون $n \geq 5$
- **لضمان العامل** 3: يجب أن يكون $n \geq 3$
- **لضمان العامل** $4 = 2^2$: يجب أن يكون $n \geq 4$

لكي تتحقق جميع الشروط، يجب أن يكون n أكبر من أو يساوي أكبر عامل أولي ، إذا الناتج هو 11

(6)

عدد الأصفار المتجاورة في نهاية أي عدد يعتمد على عدد مرات تكرار العامل 10 في تحليله، أي عدد مرات تكرار العاملين 2 و 5. بما أن العامل 2 يتوفر دائماً بكثرة أكثر من العامل 5 في $n!$، فإن عدد الأصفار يساوي عدد مرات تكرار العامل 5.

عدد مرات ظهور العامل 5 في $10!$ هي في الـ 5 والـ 10، إذًا العدد يحتوي على صفرين فقط.

(7)

لا يمكن، لأن $24!$ ينتهي بـ 4 أصفار و $25!$ ينتهي بـ 6 أصفار. وأي عدد أكبر من الـ$25!$ يحتوي على عدد أكبر من الأصفار.

(8)

نحلل:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 33$$

نفرض $A = x - y , B = x + y$

عوامل 33 هي: $(1,33), (3,11)$

- الحالة الأولى $x - y = 1$: و $x + y = 33$

$$2x = 34 \implies x = 17$$

$$\implies y = 33 - 17 = 16$$

$$\implies x, y = (17,16)$$

- الحالة الثانية $x - y = 3$: و $x + y = 11$

$$2x = 14 \implies x = 7$$

$$\implies y = 11 - 7 = 4$$

$$\implies x, y = (7,4)$$

تدريبات (1) gcd :

(1)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$8 = 2^3, 9 = 3^2$$

وهما لا يحتويان على أي قواسم مشتركة. إذًا:

$$gcd\ (8,9)\ = 1$$

(2)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 96 = 2^5 \times 3$$

القواسم المشتركة هي $3^1 \times 2^1$. إذًا:

$$gcd\ (54,96)\ = 6$$

(3)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$35 = 5 \times 7, 96 = 7 \times 13$$

القواسم المشتركة هي 7. إذًا:

$$gcd\ (35,91)\ = 7$$

(4)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 6 = 2 \times 3$$

القواسم المشتركة هي $3^1 \times 2^1$. إذًا:

$$gcd\ (54,6)\ = 6$$

(5)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$199 = 199, 256 = 2^8$$

وهما لا يحتويان على أي قواسم مشتركة. إذًا:

$$gcd\ (199,256)\ = 1$$

(6)

عند تحليل العدد 120 نحصل على

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

سنتأكد أي من الخيارات يحقق أن $gcd\ (120, n) = 24$

$gcd(120, 2 \times 3^3) = 6$

$gcd(120, 2^2 \times 3^3) = 12$

$gcd(120, 2^3 \times 3^2 \times 11) = 24$

$gcd(120, 2^4 \times 3^3 \times 5) = 120$

إذًا، الجواب الصحيح هو (C).

تدريبات lcm (2) :

(1)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$8 = 2^3, 9 = 3^2$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر.إذًا:

$$lcm\ (8,9)\ = 2^3 \times 3^2 = 72$$

(2)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 96 = 2^5 \times 3$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر.إذًا:

$$lcm\ (54,96)\ = 2^5 \times 3^3$$

(3)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$35 = 5 \times 7, 91 = 7 \times 13$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر.إذًا:

$$lcm\ (35,91)\ = 5 \times 7 \times 13$$

(4)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$54 = 2 \times 3^3, 6 = 2 \times 3$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر.إذًا:

$$lcm\ (54,6)\ = 2 \times 3^3$$

(5)

عند تحليل العددين نحصل على:

$$199 = 199, 256 = 2^8$$

نأخذ جميع قواسم العددين بالأس الاكبر.إذًا:

$$lcm\ (199,256)\ = 2^8 \times 199$$

(6)

عند تحليل العدد 20 نحصل على :

$$20 = 2^2 \times 5$$

سنتأكد أي من الخيارات يحقق أن $lcm\ (20, n)\ = 180$

$lcm\ (20, 2 \times 3^3)\ = 2^2 \times 3^3 \times 5^1 = 540$

$lcm\ (20, 2^2 \times 3^2)\ = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 = 180$

$lcm\ (20, 2^3 \times 3^2)\ = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

$lcm\ (20, 2^4 \times 3^3 \times 5)\ = 2^4 \times 3^3 \times 5^1 = 2160$

إذًا، الجواب الصحيح هو (b).

تدريبات (3):

(1)

$$18n = 6 \times 36$$

$$\Longrightarrow n = \frac{6 \times 36}{18} = 12$$

(2)

عند تحليل الأعداد نحصل على:

$$196 = 2^2 \times 7^2, \qquad 192 = 2^6 \times 3, \qquad 169 = 13^2, \qquad 240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

إذًا، المربعات الكاملة هي 196 و 169.

(3)

لا، لاحظ ان مجموع خانات العدد ستكون:

$$0 \times 100 + 1 \times 100 + 2 \times 100 = 300$$

من قابلية القسمة على 3,9 نلاحظ أن العدد يقبل القسمة على 3 ولكن لايقبل القسمة على 9. إذًا، لا يمكن أن يكون مربعا لأن قوة الـ 3 في تحليل العدد ستكون 1 وهذا عدد فردي.

(4)

قانون عدد القواسم لعدد

$$N = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}.....p_k^{\alpha_k}$$

هو:

$$.(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)....(\alpha_k + 1)$$

فإذا كان هذا العدد فرديا إذًا كل من الأقواس يجب ان يكون عدد فردي وهذا يعني أن كل من القوى يجب أن تكون عدد زوجي. وهذا يعني ان العدد يجب أن يكون مربعا.

(5)

لنكتب تحليل كل من a, b بالصورة التالية:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

بحيث $\alpha_k, \beta_k \geq 0$

فيكون القاسم المشترك الأكبر:

$$gcd(a, b) = p_1^{min\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{min\,(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{min\,(\alpha_n,\beta_n)}$$

والمضاعف المشترك الأصغر:

$$lcm(a, b) = p_1^{max\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{max\,(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{max\,(\alpha_n,\beta_n)}$$

ومن الواضح أن:

$$(\alpha_k, \beta_k) + (\alpha_k, \beta_k) = \alpha_k + \beta_k$$

(بما أن أحدهما هو الأكبر والآخر هو الأصغر)

الآن لدينا:

$$d \times m = p_1^{min\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{(\alpha_n,\beta_n)} \times p_1^{max\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{(\alpha_n,\beta_n)}$$

$$= p_1^{min\,(\alpha_1,\beta_1)+max\,(\alpha_1,\beta_1)} \cdot p_2^{(\alpha_2,\beta_2)\,+m\quad(\alpha_2,\beta_2)} \dots p_n^{(\alpha_n,\beta_n)\,+m\quad(\alpha_n,\beta_n)} = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_n^{\alpha_n+\beta_n}$$

ومن جهة أخرى:

$$a \times b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \times p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_n^{\alpha_n+\beta_n} = d \times m$$

وهو المطلوب إثباته.

حلول (التركيبات)

التوافيق

(2)

عدد الحروف غير E سبعة، نرتبها بـ !7 طريقة.

يوجد 8 فراغات بينها لوضع حرف E ثلاث مرات ولا يمكن استخدام نفس الموضع مرتين بحيث لا تتجاور نختار 3 من 8. لاحظ ان الترتيب لا يهم

$$7!.{}^{8}C_{3} = 282240$$

(1)

$${}^{5}C_{2} = 10$$

(4)

بين الحروف الاربعة: ${}^{4}C_{2} = 6$

بين الأعداد الفردية الستة: ${}^{6}C_{2} = 15$

بين الأعداد الزوجية الثلاثة: ${}^{3}C_{2} = 3$

المجموع = 6+15+3 = 24 وتراً

(3)

الحالة التي يكون فيها عدد E أكبر من عدد F تعني أن عدد E > 5.

أي عدد حرف E هو 6 أو 7 أو 8 أو 9 أو 10.

عدد الطرق = ${}^{10}C_{6} + {}^{10}C_{7} + {}^{10}C_{8} + {}^{10}C_{9} + {}^{10}C_{10}$

210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386 كلمة.

(6)

عدد الأشخاص الكلي مع أسامة = 11 شخصًا.

سيجلس أسامة في مكان محدد، وعلى يمينه ويساره شخصان من أصدقائه. عدد أزواج الأصدقاء الذين يمكن أن يجاوروه = عدد طرق اختيار شخصين من 10 أصدقاء:

${}^{10}C_{2} = 45$ زوجًا مختلفًا

(5)

$$a)\ {}^{8}C_{3}.{}^{5}C_{3} = 560$$

$$b)\ \frac{{}^{8}C_{4}.{}^{4}C_{4}}{2} = 35$$

$$c)\ \frac{{}^{8}C_{2}.{}^{6}C_{2}.{}^{4}C_{2}.{}^{2}C_{2}}{4!} = 105$$

$$d)\ \frac{{}^{8}C_{4}.{}^{4}C_{2}.{}^{2}C_{2}}{2!} = 210$$

$$e)\ {}^{8}C_{4}.{}^{4}C_{3}.{}^{1}C_{1} = 280$$

تمارين متنوعة

(2)

كل الأعداد ذات 10 خانات = 9×10^9

التي كل خاناتها مختلفة = $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 1$

إذن المطلوبة = $9 \times 10^9 - 9 \times 9!$

(1)

نختار شخص للغرفة الاولى ثم شخصان للثانية ثم البقية للغرفة الاخيرة (لاحظ ان التوافيق الاخير يمكن اهماله لان الاربعة المتبقيين سيذهبون للغرفة الاخيرة اجباريا):

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{4} = 105$$

(4)

العدد الكلي = 9×10^6

التي لا تحوي "1" = 8×9^6

وهذا لا يساوي النصف، إذن الجواب: لا.

(3)

نأخذ حالات عدد B ونجمعهم:

$$\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3}$$

(6)

نختار صف وعمود لكل قلعة لوضع القلاع فيها ولا يتكرر اي صف او اي عمود لان لا يمكن وجود قلعتين في نفس الصف او العمود. ثم نقسم على !4 لتماثل القلاع:

$$\frac{(8 \times 8) \times (7 \times 7) \times (6 \times 6) \times (5 \times 5)}{4!}$$

(5)

ننظر الى اول ٩ خانات من اليسار، اذا كان مجموعها زوجي (افرض عددها A) اذا الاحاد يجب ان تكون زوجية ولها 5 خيارات، واذا كان فردي (عددها B) يجب ان تكون الاحاد فردية ولها 5 خيارات.

إذا المجموع: $5A + 5B = 5(A + B)$

$A + B$ هي الاعداد من 9 خانات وتساوي 9×10^8

الجواب: $5 \times 9 \times 10^8$

(8)

بما أن جواد ثابت في اللجنة، نختار شخصين من التسعة الباقين: $\binom{9}{2}$

(7)

نعدّ A وB ككتلة واحدة مع باقي 4 كتب اذا لهم !5 ترتيب. داخل الكتلة ترتيبان (AB أو BA):

$$5! \times 2$$

الترتيب التصاعدي والتنازلي

(2)

نفس فكرة السؤال السابق يكون جواب الفقرتين

نفسه وهو : $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

(1)

لاحظ ان اختيار 3 خانات تكفي لتحديد الترتيب تصاعدي او تنازلي. وفي حالة التصاعدي لايمكن اختيار الصفر لانه يكون في خانة المئات.

تصاعدي: نختار 3 أرقام مختلفة من 1,2..,9 : $\binom{9}{3}$

تنازلي: 3 أرقام مختلفة من 0,1..,9 : $\binom{10}{3}$

إذن العدد الكلي: $\binom{9}{3} + \binom{10}{3} = 204$

(4)

طرق سحب 3 كروت مع الترتيب: 10 × 9 × 8

الفوز لسالم (ترتيب تصاعدي) : $\binom{10}{3} = 120$

لان لكل 3 كروت ترتيب واحد فقط تصاعدي

النتيجة: محمد حظه أكبر، سالم يفوز في حوالي 16.7% من الحالات

(3)

حالة التصاعدي تختلف حيث لا يمكن اختيار الصفر:

a) $\binom{8}{4}$

b) $\binom{9}{4}$

عدد المسارات على شبكة

(1)

نحتاج 6 قفزات للامام و 7 للخلف للنقطة 1−

اذا عدد الطرق هو عدد اختيار 6 قفزات للامام من اصل 13 قفزة:

$\binom{13}{6}$ او $\binom{13}{7}$ وهم متساويين

(2)

48

(3)

كل مستطيل يُحدد باختيار خطين عموديين من الخطوط العمودية وخطين أفقيين من الخطوط الأفقية : $\binom{8}{2} \times \binom{10}{2} = 1260$

(4)

لدينا 25 حرف نختار منهم اثنان بالتوافيق (ولهم ترتيب واحد لانهم مرتبين ابجديا) وكذلك نختار رقمان من اصل 9:

$$\binom{25}{2} \times \binom{9}{2} = 10800$$

(5)

3 حروف علة (A,O,U) نختار منها 2: $\binom{3}{2} = 3$

وهناك 6 حروف ساكنة: M,T,T,H,C,N

3 حروف بدون T : $\binom{4}{3} = 4$

3 حروف منها T واحدة: $\binom{4}{2} = 6$

3 حروف منها اثنان T : $\binom{4}{1} = 4$

لان لكل الحالات يوجد 4 حروف غير T

المجموع: $3(4+6+4) = 42$

نسمو

NSMO

أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني

وزارة التعليم
Ministry of Education

موهبة
Mawhiba