وزارة التعليم
Ministry of Education

موهبة
Mawhiba

نسمو
NSMO

# أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني "نسمو"

## الحقيبة العلمية للمرحلة الرابعة
## نهـــائيـــات "نسمـــو"2026

## الرياضيات- كبار

بسم الله الرحمن الرحيم

# الفهرس

# مقدمة

أبناؤنا وبناتنا النخبة،

نبارك لكم بلوغكم **مرحلة ما قبل النهائيات** في الأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات، وهي المرحلة التي تُعد تتويجًا لجهودكم المستمرة في الفهم والتدريب والإبداع.

في هذه الحقيبة المميزة، سنواصل التعمق في الفروع الأربعة :**التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد،** مع موضوعات مثل التوافيق، نظرية فيثاغورس، المعادلات التربيعية، والعوامل والمضاعفات المشتركة.

تهدف هذه المرحلة إلى صقل مهارات التفكير العالي والتحليل المنطقي، وتدريبكم على التعامل مع المسائل المركبة التي تتطلب دقة واستنتاجًا متقدمًا.

كما تُعد تمهيدًا مباشرًا للمرحلة النهائية من المسابقة، حيث يظهر التميز الحقيقي في القدرة على الربط بين المفاهيم الرياضية وتطبيقها في مواقف جديدة.

نحن على ثقة بأنكم أهل لهذه المرحلة، ونسأل الله لكم التوفيق والسداد في رحلتكم نحو القمة.

الفريق العلمي للأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات (نسمو) – مسار الرياضيات

# الوحدة الأولى : الجبـــــــــر

# معادلة الدرجة الثانية

المقدار: $ax^2 + bx + c = 0$

(بحيث $a, b, c$ ثوابت وَ $a \neq 0$ ) يسمى معادلة من الدرجة الثانية .

وحلولها تدعى جذور أو أصفار كثيرة الحدود.

لدينا طرق عديدة لإيجاد جذور المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ومنها :

1. التحليل.
2. طريقة إكمال المربع للحصول على مربع كامل كما في المتطابقات.
3. القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حيث $\Delta$ المميز ويعطى بالعلاقة : $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا كان: $\Delta > 0$ : المعادلة لها جذران حقيقيان مختلفان .

$\Delta < 0$ : المعادلة ليس لها جذور حقيقية.

$\Delta = 0$ : المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان.

### مثال 1:

**حل المعادلة $x^2 + 6x + 5 = 0$**

بثلاث طرق مختلفة.

### الحل:

1- التحليل:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

نبحث عن عددين حاصل ضربهم 5 وحاصل جمعهم 6

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5) = 0$$
$$\Rightarrow (x+1) = 0 \text{ or } (x+5) = 0$$
$$\Rightarrow x = -1 \text{ or } x = -5$$

2- اكمال المربع:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

ننقل الحد الثابت إلى الطرف الأيمن ونضيف مربع نصف معامل $x$ للطرفين

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 3^2$$
$$\Rightarrow (x+3)^2 = 4$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\Rightarrow x + 3 = \pm 2$$
$$\Rightarrow x = -1 \text{ or } x = -5$$

3- القانون العام:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$a = 1, b = 6, c = 5 \ \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(5) = 36 - 20 = 16$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-6+4}{2} \ \text{ or } \ x = \frac{-6-4}{2}$$
$$\Rightarrow x = -1 \text{ or } x = -5$$

### علاقة الجذر بمعاملات معادلة الدرجة الثانية:

وتسمى علاقة فيتا "Vieta Formula" إذا كان $r, s$ جذري معادلة الدرجة الثانية :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فإن مجموع الجذرين يُعطى بالعلاقة: $r + s = \frac{-b}{a}$

وحاصل ضرب الجذرين يُعطى بالعلاقة: $rs = \frac{c}{a}$.

## تدريبات :

(1) أوجد جذور المعادلات التالية:

$(a)\ x^2 - 12x - 540 = 0$

$(b)\ 3x^2 = 10x + 24$

$(c)\ (x^4 - 11x^3 + 24x^2) - (4x^2 - 44x + 96) = 0$

(2) أوجد قيمة $a$ التي تجعل للمعادلة:

$$ax^2 - 5x + 9 = 0$$

جذراً حقيقياً واحداً .

(3) كم عدداً صحيحاً $x$ يحقق المعادلة :

$$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$$

(4) إذا كان أحد جذور المعادلة :

$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ هو $x = 1$ .

أوجد الجذر الآخر بدلالة $a, b, c$

(5) إذا كانت $a, b$ هي جذور المعادلة التربيعية $x^2 - mx + 2 = 0$.

وبفرض أن $a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{a}$

جذور المعادلة التربيعية $x^2 - px + q = 0$ أوجد قيمة $q$ .

(6) أوجد كل حلول نظام المعادلات التالية :

$$\begin{cases} x^2 + xy = 39 \\ x - y = -33 \\ y + z = 13 \end{cases}$$

(7) إذا كان $p(x)$ معادلة من الدرجة الثانية بحيث :

$$p(0) = -1, p(1) = 9, p(2) = 25$$

أوجد $p(-1)$ .

(8) أوجد كل قيم $k$ بحيث يكون للمعادلة:

$$x^2 + kx + 27 = 0$$

جذران حقيقيان مختلفان .

(9) أثبت أنه إذا كان:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{a+b}$$

فإنه لا يمكن أن يكون كل من $a, b$ أعداداً حقيقيةً.

(10) أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة:

$$(2+(2+(2+(2+x)^2)^2)^2)^2 = 15129$$

حيث:

$$(15129 = 123^2)$$

(11) أوجد كل الحلول الحقيقية $(x, y)$ التي تحقق النظام :

$$x^2 + y = 12 = y^2 + x$$

(12) أوجد الحل الحقيقي لنظام المعادلات التالية :

$$\begin{cases} 2x_1 = x_5^2 - 23 \\ 4x_2 = x_1^2 + 7 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}$$

# أشكال أخرى للمتطابقات

## تعريف:

المتطابقة هي مساواة بين طرفين متكافئين، بحيث يمكن استنتاج أحد الأطراف من الآخر بعمليات جبرية. بعكس المعادلة التي هي مساواة بين طرفين والمطلوب منا إيجاد قيمة المتغير التي تجعل الطرفين متساويين.
تكمن أهمية المتطابقات والمتطابقات الضريبة خاصة في تبسيط العديد من المقادير الجبرية وحل الكثير من المعادلات. سنحاول في هذا الجزء باستخدام المتطابقات السابقة التي درسناها في الملتقى السابق اثبات أشكال أخرى من المتطابقات.

## مثال 1:

مستخدما متطابقتي مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين استنتج الطرف الآخر للمتطابقة:

$$(a+b)^2+(a-b)^2=\cdots\cdots\cdots$$

### الحل:

باستخدام متطابقة مربع مجموع حدين يمكن فك المقدار $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$ كما يلي:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{ab}$$

باستخدام متطابقة مربع الفرق بين حدين يمكن فك المقدار $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$ كما يلي:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{ab}$$

ومن ثم وبالتجميع نحصل على المطلوب:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2$$

## تدريبات :

(1) مستخدما المتطابقات التي تعلمتها سابقا استنتج أحد طرفي المتطابقة في كل مما يلي:

$(a)\ (a+b)^2-(a-b)^2=\cdots$

$(b)\ \ldots=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$(c)\ \ldots=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$(d)\ \ldots=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

(2) **تحدي:** بنفس الأسلوب السابق حاول عزيزي الطالب استنتاج الطرف الأخر

$a)\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

$b)\ (a+b+c)^3=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) إذا كان $x$ عدد حقيقي بحيث $3=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ فأوجد قيمة $x^3+\frac{1}{x^3}$

(4) حل المعادلة $2=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

(5) إذا كانت $a,b,c$ أعداد حقيقية تحقق:

$$(a-b)(a+b-c)=3\ ,(b-c)(b+c-a)=5$$

أوجد قيمة: $(c-a)(a+c-b)$.

(6) حل المعادلة التالية:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$$

(7) حل المعادلة التالية:

$ab(x^2+1)=(a^2+b^2)x$ بحيث $ab\neq 0$ وَ $a>b$.

(8) حل المعادلة:

$$\sqrt{x-10}-\frac{6}{\sqrt{x-10}}=5$$

(9) حل المعادلة:

$$\frac{(2x-1)^2}{2}+\frac{(3x-1)^2}{3}+\frac{(6x-1)^2}{6}=1$$

# التحليل إلى عوامل

## 1-3 التحليل باستخدام المتطابقات-إضافة حدود:

التحليل إلى عوامل طريقة فعالة لتحويل بعض الصيغ الجبرية المجموعة أو المطروحة إلى مقادير مضروبة يسهل التعامل معها.

ونستطيع تحليل بعض المقادير باستخدام متطابقات مشهورة مثل متطابقة الفرق بين مربعين:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

ويمكن اثبات هذه المتطابقة بإحدى الطريقتين:

**الأولى:** من الطرف الأيمن بضرب القوسين والتجميع للحصول مباشرة على الطرف الأيسر.

**الثانية:** من الطرف الأيسر وبإضافة الحد $ab$ وطرحه ومن ثم بالتجميع المناسب كما يلي:

$$a^2 - b^2 = a^2 - b^2 + ab - ab =$$

$$a^2 + ab - b^2 - ab = a(a+b) - b(a+b)$$

$$= (a+b)(a-b)$$

### مثال 1:

حلل المقدار التالي:

$$a^3 - b^3$$

### الحل:

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$$

$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

الصيغة العامة:

$$1)\ x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$$

$$2)\ x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1})\ \ for\ odd\ n \in \mathbb{N}$$

## تدريبات :

**حلل كلا من المقادير التالية:**

| |
|---|
| (1) $a^3+b^3$ |
| (2) $x^2-(a+b)x+ab$ |
| (2) $x^2+(a+b)x+ab$ |
| (4) $x^4+x^2+1$ |
| (5) $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ |
| (6) $x^5+x+1$ |
| (7) $(x+y)(x-y)+4(y-1)$ |
| (8) $x^3(x-2y)+y^3(2x-y)$ |
| (9) $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ |
| (10) $1+a+b+c+ab+bc+ca+abc$ |
| (11) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$ |

(12) إذا كان:

$$(c+\frac{1}{c}+1)(c+\frac{1}{c})=1$$

فاحسب

$$(3c^{100}+\frac{2}{c^{100}}+1)(c^{100}+\frac{2}{c^{100}}+3)$$

## 2-3 تحليل المقدار $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$:

يعتبر المقدار $\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}$ من المقادير المشهورة في مسابقات الأولمبياد نظرا لعدد الأسئلة التي طرحت فيها.

يمكن تحليل هذا المقدار باستخدام طريقة إضافة الحدود ومن ثم التجميع المناسب كما يلي:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc +$$
$$ab^2 - ab^2 + ac^2 - ac^2 +$$
$$a^2b - a^2b + a^2c - a^2c +$$
$$bc^2 - bc^2 + b^2c - b^2c =$$
$$a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - abc - a^2c +$$
$$b^3 + a^2b + bc^2 - ab^2 - bc^2 - abc +$$
$$c^3 + a^2c + b^2c - abc - bc^2 - ac^2 =$$
$$a(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) +$$
$$b(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) +$$
$$c(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

ويمكن كتابة الصورة الأخيرة لتحليل المقدار:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

على الصورة:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)[a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca]$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

**ملحوظة مهمة:**

في الحالة الخاصة $\boldsymbol{a + b + c = 0}$ فإن $\boldsymbol{a^3 + b^3 + c^3 = 3abc}$

وتستخدم هذه الصيغة لحل الكثير من المسائل.

# تدريبات :

(1) إذا كان:

$$a + b = 5 \;, \qquad b + c = 10 \;, \qquad c + a = 15$$

فأوجد قيمة:

$$(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$$

(2) حل المعادلة:

$$(x - 2009)^3 + (x - 2010)^3 + (x - 2011)^3 = 3(x - 2009)(x - 2010)(x - 2011)$$

(3) إذا كان:

$$a = 2009 \,, b = 2010 \,, c = \frac{1}{2010}$$

فأوجد قيمة:

$$(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (c + b - a)^3 - (a - b + c)^3 - 23abc$$

(4) حل المعادلة:

$$\sqrt[3]{x - 3} + \sqrt[3]{x + 3} - \sqrt[3]{x} = 0$$

# علاقات فيتا

هي علاقة تربط بين جذور كثيرة حدود ومعاملاتها حيث يقابل المعامل مجموع متماثل لجذور كثيرة الحدود.

في البداية سنناقش حالات خاصة لها ثم نستنتج منها الصورة العامة.

### تعريف:

نقول عن $a$ أنه جذر لكثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان $f(a) = 0$.

مثال:

كثيرة الحدود $f(x) = x^2 + 5x + 6$ لها الجذران $-3, -2$ حيث

$f(-2) = f(-3) = 0$

## 1-4 علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة الثانية:

إذا كان $r_1, r_2$ جذرين لكثيرة الحدود $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ (حيث $a_2 \neq 0$) فإنه يمكن كتابة $f(x)$ على

الصورة:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_2(x - r_1)(x - r_2) \\ &= a_2(x^2 - xr_1 - xr_2 + r_1r_2) \\ &= a_2(x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2) \\ &= a_2x^2 - a_2(r_1 + r_2)x + a_2r_1r_2 \end{aligned}$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين نجد ان

مجموع الجذرين يُعطى بالعلاقة:

$$-a_2(r_1 + r_2) = a_1 \quad \Longrightarrow \quad r_1 + r_2 = \frac{-a_1}{a_2}$$

وحاصل ضرب الجذرين يُعطى بالعلاقة:

$$a_2r_1r_2 = a_0 \quad \Longrightarrow \quad r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

## 4-2 علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة الثالثة:

إذا كان $r_1, r_2, r_3$ جذور كثيرة الحدود $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ حيث $(a_3 \neq 0)$ فإنه يمكن كتابة

$f(x)$ على الصورة:

$$f(x) = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) =$$
$$a_3(x^3 - x^2r_1 - x^2r_2 - x^2r_3 + r_1r_2x + r_2r_3x + r_3r_1x + r_1r_2r_3) =$$
$$a_3(x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x + r_1r_2r_3$$
$$= a_3x^3 - a_3(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a_3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)x - a_3r_1r_2r_3$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين نجد أن مجموع الجذور يُعطى بالعلاقة:

$$-a_3(r_1 + r_2 + r_3) = a_2 \quad \Longrightarrow \quad r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-a_2}{a_3}$$

وحاصل مجموع ضرب الجذور مثنى مثنى يُعطى بالعلاقة:

$$a_3(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) = a_1 \quad \Longrightarrow \quad r_1r_2 + r_{2r_3} + r_3r_1 = \frac{a_1}{a_3}$$

وحاصل ضرب الجذور يُعطى بالعلاقة:

$$-a_3r_1r_2r_3 = a_0 \quad \Longrightarrow \quad r_1r_2r_3 = \frac{-a_0}{a_3}$$

### مثال 1:

إذا كانت $r_1, r_2, r_3$ جذور للمعادلة $5x^3 - 2x + 3 = 0$ فاكتب علاقات فيتا لهذه المعادلة.

### الحل:

مجموع الجذور $r_1 + r_2 + r_3 = 0$

وحاصل ضرب الجذور مثنى مثنى $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = \frac{-2}{5}$

وحاصل ضرب الجذور $r_1r_2r_3 = \frac{-3}{5}$

## تدريبات :

(1) إذا كان $a, b$ جذري كثيرة الحدود $2x^2 - 3x + m = 0$ وكان $a = 2b$ فأوجد قيمة $m$.

(2) إذا كان $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12x - 19$ بحيث $a, b, c$ جذور لـ $f(x)$ فأوجد قيمة:

$i)\ a^2 + b^2 + c^2$

$ii)\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$

(3) أوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي جذورها الاعداد $a, b, c$ ومعامل $x^3$ فيها يساوي 1 حيث:

$abc = -64$

$a^2 + b^2 + c^2 = 84$

$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{-3}{32}$

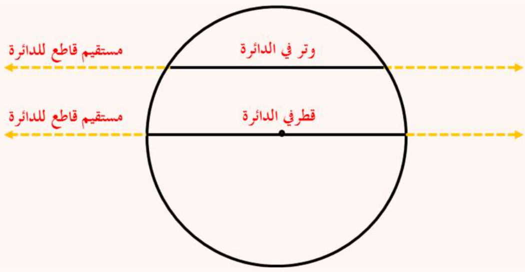
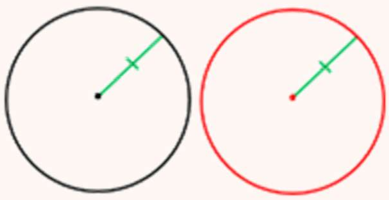
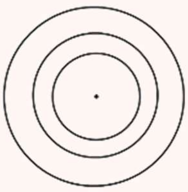
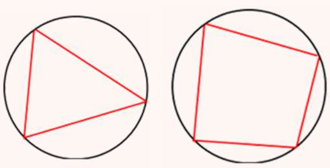
(4) إذا كانت $\alpha, \beta, \delta$ هي الجذور الحقيقية للمعادلة $x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$ فأثبت أن:

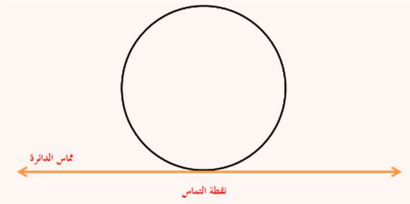
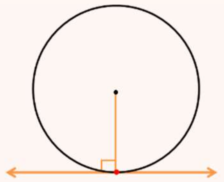
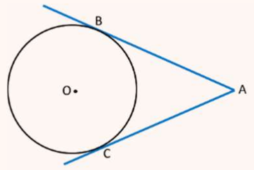
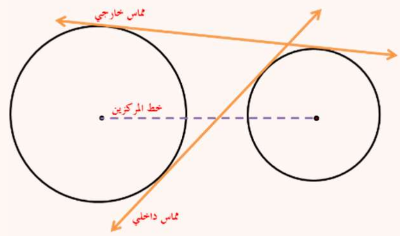
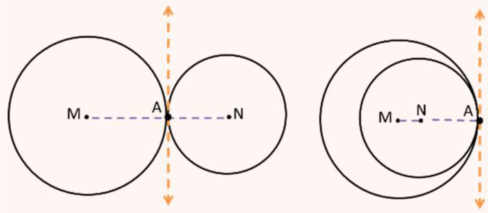
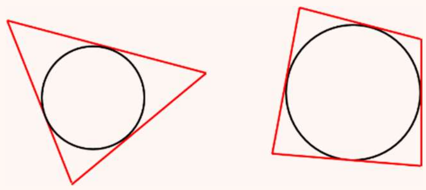
$$\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\delta} = 0$$

# الوحدة الثانية : الهندســـــة

# الدائرة

سوف ندرس في هذا الجزء من الهندسة موضوع الدائرة، والذي يمثل أهمية كبيرة في استكمال معرفتنا حول موضوعات الهندسة الإقليدية، وتمثل الدائرة مع المثلث الجزء الأكبر منها، وسوف نلاحظ وجود العديد من المسائل التي تربط بينهما.

| | |
|---|---|
| **تعريف1:**<br>- الدائرة هي مجموعة من النقاط في المستوى تبعد مسافات متساوية من نقطة ثابتة، تسمى الأبعاد المتساوية أنصاف أقطار للدائرة، أما النقطة الثابتة فتسمى مركز الدائرة.<br>- القطعة الواصلة بين مركز الدائرة والدائرة تسمى نصف قطر.<br>- أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متطابقة. |  |
| **تعريف2:**<br>- القطعة الواصلة بين نقطتين على الدائرة تسمى وتر للدائرة،<br>- إذا مر أي وتر بمركز الدائرة يسمى قطر للدائرة<br>- المستقيم القاطع للدائرة هو المستقيم الذي يحوي وتر لهذه الدائرة. |  |
| **تعريف3:**<br>الدوائر المتطابقة هي الدوائر التي له نفس طول نصف القطر. |  |
| **تعريف4:**<br>الدوائر متحدة المركز هي الدوائر التي لها نفس المركز. |  |
| **تعريف5:**<br>المضلع المنشأ داخل دائرة هو المضلع الذي تقع رؤوسه على الدائرة، وتسمى الدائرة بالدائرة المحيطة للمضلع، ويسمى المضلع بالمضلع الدائري |  |

| | |
|---|---|
| **تعريف6:**<br>مماس الدائرة هو المستقيم الذي يمس الدائرة في نفس المستوى في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس. |  |
| **نظرية1:**<br>نصف القطر عمودي على المماس في نقطة التماس. |  |
| **نظرية2:**<br>المماسان المرسومان من نقطة واحدة خارج الدائرة متطابقان. |  |
| **تعريف7:**<br>المماس المشترك لدائرتين في نفس المستوى يسمى مماس مشترك داخلي إذا قطع خط المركزين، ويكون مماس مشترك خارجي إذا لم يقطع خط المركزين. |  |
| **تعريف8:**<br>الدائرتان المتماستان في مستوى واحد هما الدائرتان اللتان تمسان مستقيما واحدا في نقطة واحدة. في الدائرتين المتماستين يكون مركزاهما ونقطة التماس على استقامة واحدة. |  |
| **تعريف9:**<br>عندما تمس أضلاع مضلع دائرة واحدة فإن هذا المضلع يسمى المضلع المحيط بالدائرة وتسمى الدائرة بالدائرة الداخلية للمضلع. |  |

## تدريبات:

(1) في الشكل؛ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ مماسان للدائرة $O$ ، أثبت أن:

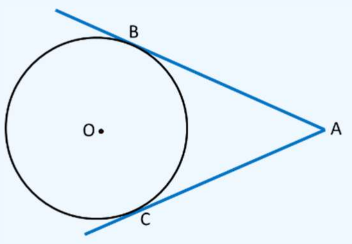
a) $\angle ABO = \angle ACO$

b) $AB = AC$

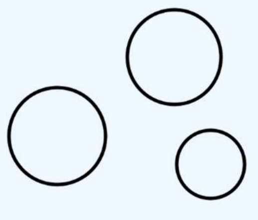
c) $\angle AOB = \angle AOC$

d) $\angle BAO = \angle CAO$

e) إذا كانت نقطة تقاطع $AO, BC$ هي $D$ فأثبت أن $BD \perp AD$




(2) على الشكل المجاور: أوجد عدد المماسات المشتركة لكل دائرتين من الدوائر الثلاث

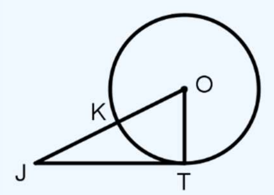


(3) على الشكل المجاور:

a) إذا كان $JO = 13$ ، $OT = 5$ فإن $JT = $ ____________

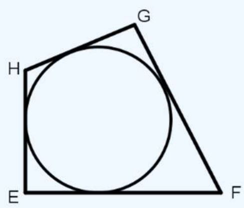
b) إذا كان $m\angle OJT = 30°$ ، $JO = 20$ فإن $JT = $ ________

c) إذا كان $JK = 9$ ، $KO = 8$ فإن $JT = $ ____________



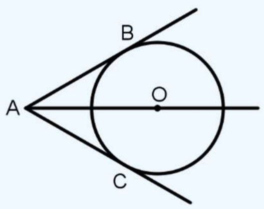

(4) على الشكل المجاور:

إذا كان $HGFE$ مضلع محيط للدائرة، فاكتشف ثم أثبت العلاقة بين $HE + GF$ , $HG + EF$.




(5) على الشكل المجاور:

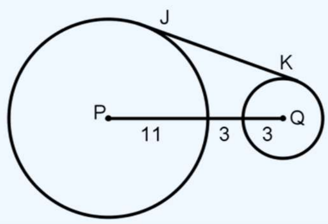
إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ يمسان الدائرة $O$، اكتشف ثم أثبت العلاقة بين $\angle BAC$ , $\overrightarrow{OA}$.




(6) على الشكل المجاور:

إذا كان $JK$ مماس خارجي للدائرتين $P, Q$ ، فأوجد طول $JK$.

(إرشاد: ما نوع الرباعي $JPQK$)

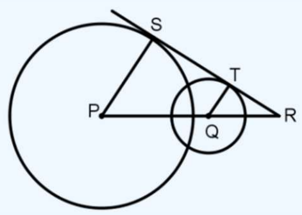


(7) على الشكل المجاور:

إذا كان $SR$ مماس خارجي للدائرتين $P, Q$ ،

$PR = 30$ ، $TR = 8$ ، $QT = 6$

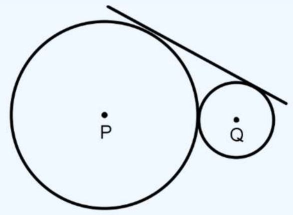
فأوجد طول كل من $PS$ , $PQ$ , $ST$




(8) على الشكل المجاور:

إذا كان طولا نصفي قطري الدائرتين $P, Q$ هما 2 , 6، على الترتيب،

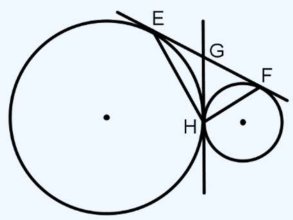
فأوجد طول المماس المشترك الخارجي للدائرتين




(9) على الشكل المجاور:

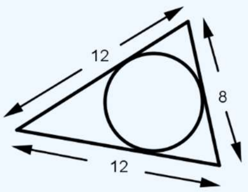
دائرتين متماستين من الخارج، $\overline{EF}$ مماس خارجي مشترك،

$\overline{GH}$ مماس داخلي مشترك، أوجد قياس $\angle EHF$ ، مع الإثبات




(10) على الشكل المجاور:

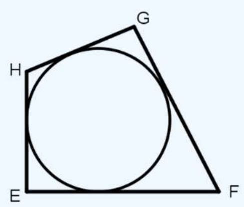
أوجد طول نصف قطر الدائرة الداخلية للمثلث.



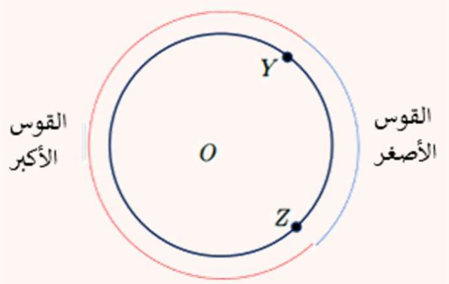
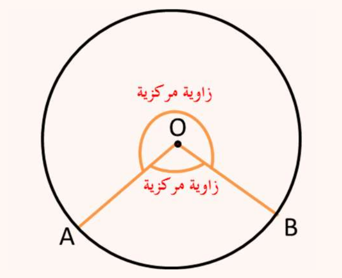
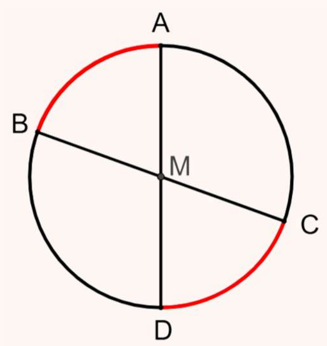

(11) على الشكل المجاور، دائرة مرسومة داخل الشكل الرباعي $EFGH$

إذا كان $\overline{EF} = 16$ , $\overline{FG} = 15$ , $\overline{GH} = 12$.

أوجد طول $\overline{HE}$



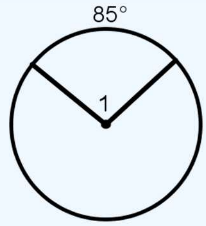
# الأقواس والزوايا المركزية في الدائرة

| | |
|---|---|
| **تعريف10:**<br>- القوس هو جزء من الدائرة، فإذا كان لدينا النقطتان $Y, Z$ على الدائرة $O$ فإنهما دائما نقطتا النهاية لقوسين في الدائرة أحدهما يسمى القوس الأصغر والثاني يسمى القوس الأكبر<br>- إذا كان $\overline{YZ}$ قطر للدائرة فإن القوسين يمثل كل منهما نصف الدائرة. |  |
| **تعريف11:**<br>- الزاوية المركزية هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها نصفا قطرين في نفس الدائرة. وتحصر قوساً في الدائرة يسمى قوس الزاوية المركزية.<br>- قياس القوس في الدائرة يساوي قياس زاويته المركزية<br>مثلاً: إذا كان $m\angle AOB = 125°$ فإن $m(\widehat{AB}) = 125°$ |  |
| **تعريف12:**<br>القوسان المتطابقان هما قوسان في دائرة أو دائرتين متطابقتين لهما نفس القياس |  |
| **نظرية3:**<br>في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة، تتطابق الأقواس إذا وفقط إذا كانت الزوايا المركزية التي تحصرها متطابقة<br>مثلاً: $\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \Leftrightarrow \angle AMB \cong \angle CMD$ | |

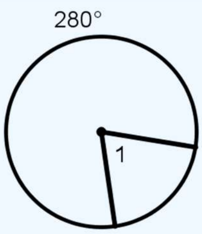
## تدريبات:

في التدريبات $6 - 1$ أوجد قياس الزاوية المركزية $m\angle 1$.

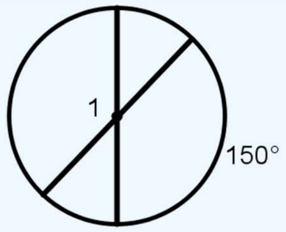
(1)



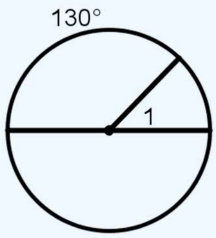

(2)



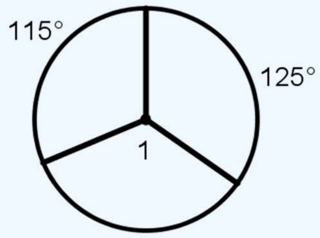

(3)



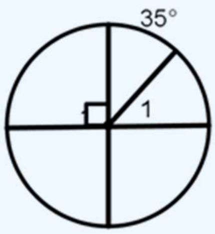

(4)




(5)

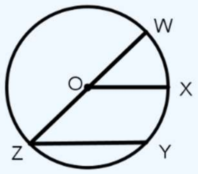



(6)




(7) على الشكل المجاور: $\overline{WZ}$ قطر في الدائرة $O$ ، $\overline{ZY} \parallel \overline{OX}$.

أثبت أن $\widehat{XY} \cong \widehat{WX}$ .



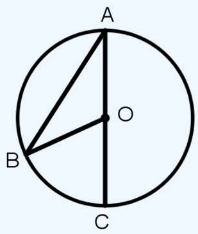

(8) على الشكل المجاور: $\overline{AC}$ قطر في الدائرة $O$

a) إذا كان $m\angle A = 35°$ فإن $m\angle B = $ ________ ،

$m\angle BOC = $ ________ ، $m(\widehat{BC}) = $ ________

b) إذا كان $m\angle A = n$ فإن $m(\widehat{BC}) = $ ________

c) إذا كان $m(\widehat{BC}) = 6k$ فإن $m\angle A = $ ________

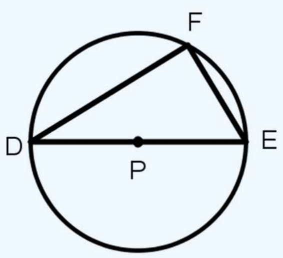



(9) على الشكل المجاور:

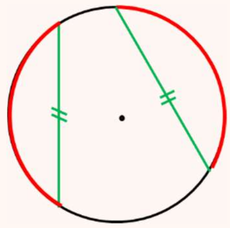
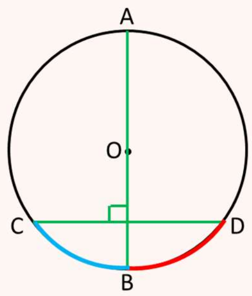
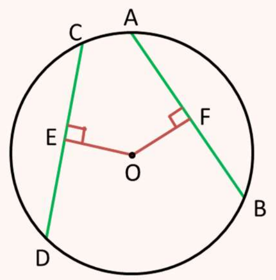
$\overline{DE}$ قطر في الدائرة $P$ ، قياس القوس $\widehat{EF} = n$،

a) أوجد قياس $\angle DEF$

b) أوجد قياس $\angle DFE$



# الأقواس والأوتار

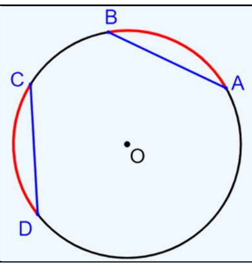
| | |
|---|---|
| **نظرية4:**<br>. في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة،<br>1)الأوتار المتطابقة تحصر أقواسا متطابقة.<br>2)الأقواس المتطابقة تحصر أوتاراً متطابقة. |  |
| **نظرية5:**<br>قطر الدائرة العمودي على الوتر ينصف القوس الذي يحصره هذا الوتر.<br>مثلاً: في الشكل المجاور، القطر $\overline{AB}$ ينصّف الوتر $\overline{CD}$ وينصّف القوس $\overset{\frown}{CD}$<br>أي أن $\overset{\frown}{CB} \cong \overset{\frown}{BD}$ |  |
| **نظرية6:**<br>في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة،<br>1)الأوتار المتطابقة تبعد مسافات متساوية من مركز الدائرة (أو مراكز الدوائر)<br>2)الأوتار التي تبعد مسافات متطابقة عن مركز الدائرة متطابقة.<br>مثلاً: في الشكل، $\overline{AB} \cong \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{OF} \cong \overline{OE}$ |  |

## تدريبات:

(1) على الشكل المجاور، أثبت أن:

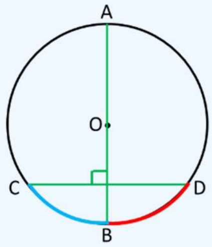
a) إذا تطابق الوتران $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ يتطابق القوسان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

b) إذا تطابق القوسان $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$ يتطابق الوتران $\overline{AB} \cong \overline{CD}$




(2) في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ قطر، $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ،

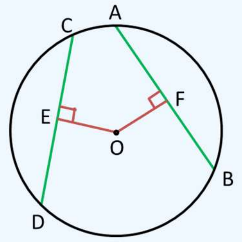
أثبت تطابق القوسين $\widehat{CB} \cong \widehat{DB}$




(3) في الشكل المجاور، أثبت أن:

a) إذا كان $AB = CD$ فإن $OF = OE$

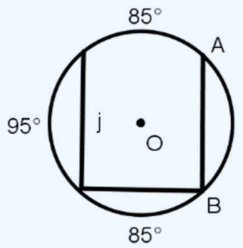
b) إذا كان $OF = OE$ فإن $AB = CD$




(4) في الشكل المجاور،

طول الوتر

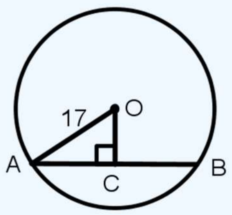
$\overline{AB} =$ ______




(5) في الشكل المجاور،

إذا كان $\overline{AB} = 30$

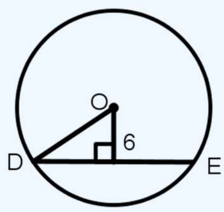
فإن $\overline{OC} =$ ______




(6) في الشكل المجاور،

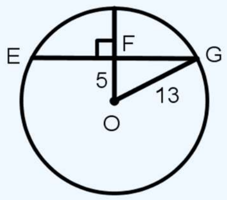
إذا كان $\overline{DE} = 16$

فإن $\overline{OD} =$ ______



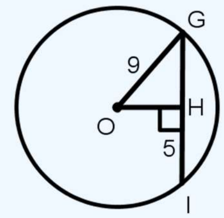

(7) في الشكل المجاور،

$\overline{EG} =$ ______




(8) في الشكل المجاور،

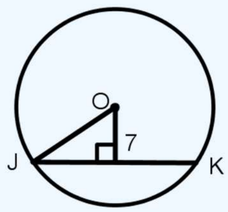
$\overline{OH} =$ ______




(9) في الشكل المجاور،

إذا كان $\overline{JK} = 14$

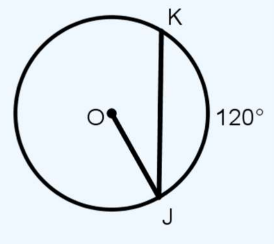
فإن $\overline{OJ} =$ ______



(10) في الشكل المجاور،

إذا كان $\overline{OJ} = 12$

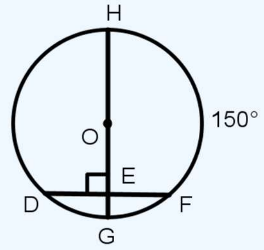
فإن $\overline{JK} =$ ______




(11) في الشكل المجاور،

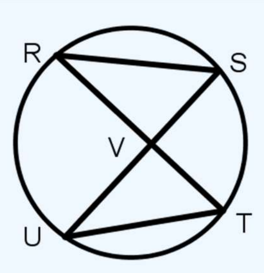
إذا كان $\overline{OE} = 8\sqrt{3}$

فإن $\overline{HG} =$ ______




(12) على الشكل المجاور، $\overline{RS} \cong \overline{UT}$ ، $\angle R \cong \angle U$

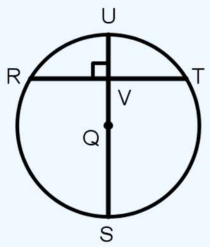
أثبت أن $\overline{RV} \cong \overline{UV}$ , $\overline{VS} \cong \overline{VT}$.



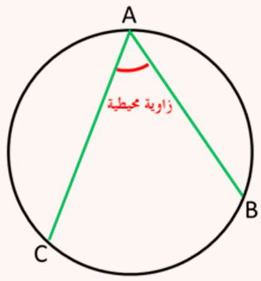
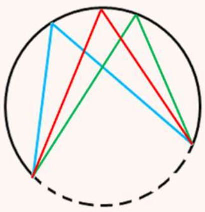
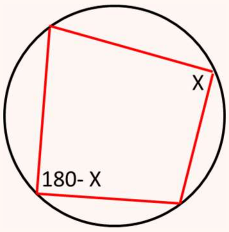
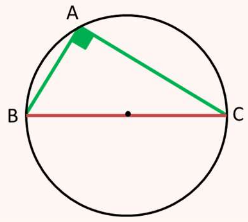
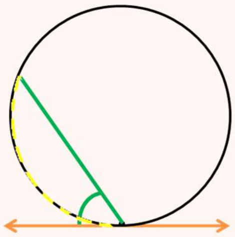

(13) على الشكل المجاور، في الدائرة $Q$ ، القطر $\overline{US}$ عمودي على الوتر $\overline{RT}$،

إذا كان $\overline{RT} = 16$ , $\overline{QS} = 10$

أوجد طول $\overline{UV}$



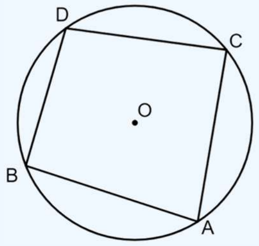
# الزوايا المحيطية والمماسية

| | |
|---|---|
| **تعريف13:**<br>الزاوية المحيطية هي الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة وضلعاها وتران |  |
| **نظرية7:**<br>قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس الذي تحصره.<br>مثلاً: في الشكل المجاور، $m\angle A = \frac{1}{2} m(\widehat{BC})$ | |
| **نتيجة1:**<br>قياسات الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية |  |
| **نتيجة2:**<br>الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة متكاملتان |  |
| **نتيجة3:**<br>الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة |  |
| **نظرية8:**<br>قياس الزاوية المحصورة بين وتر ومماس عند نقطة التماس يساوي نصف قياس القوس المحصور بين هذا الوتر والمماس |  |

## تدريبات:

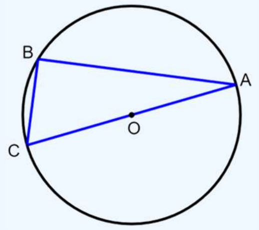
(1) على الشكل المجاور، أثبت أن:

$m\angle A + m\angle D = 180°$




(2) في الشكل المجاور، $\overline{AC}$ قطر،

أثبت أن $m\angle B = 90°$

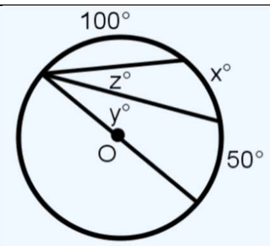



(3) في الشكل المجاور،

$x =$ ______

$y =$ ______

$z =$ ______

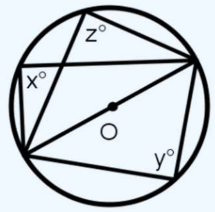



(4) في الشكل المجاور،

$x =$ ______

$y =$ ______

$z =$ ______

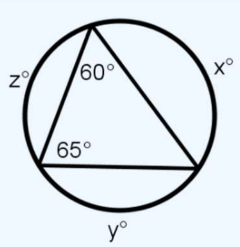



(5) في الشكل المجاور،

$x =$ ______

$y =$ ______

$z =$ ______

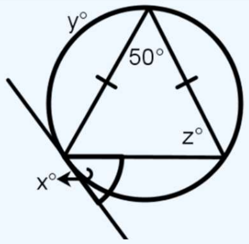



(6) في الشكل المجاور،

$x =$ ______

$y =$ ______

$z =$ ______

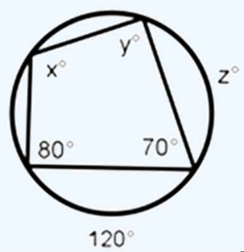



(7) في الشكل المجاور،

$x =$ ______

$y =$ ______

$z =$ ______

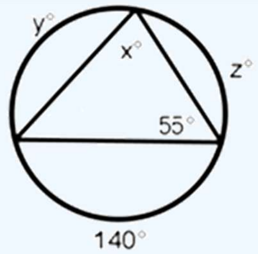



(8) في الشكل المجاور،

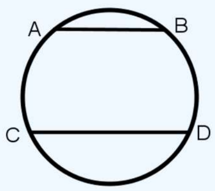
$x =$ ______

$y =$ ______

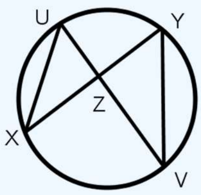
$z =$ ______

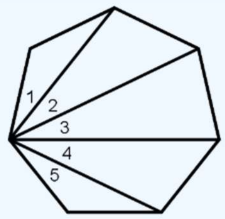
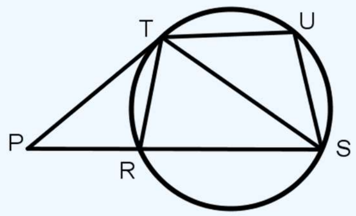



(9) على الشكل المجاور أثبت أنه إذا توازي الوتران $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ في دائرة فإنهما يحصران قوسين متطابقين $\widehat{BD} \cong \widehat{AC}$




(10) على الشكل المجاور أثبت أن $\Delta UXZ \sim \Delta YVZ$



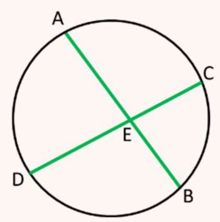
| | | |
|---|---|---|
| (11) | على الشكل المجاور أوجد قياسات الزوايا المرقمة إذا كان الشكل يمثل سباعي منتظم |  |
| (12) | على الشكل المجاور، $\overline{PT}$ مماس للدائرة، $\overline{PS} \parallel \overline{TU}$<br>أوجد ثلاث مثلثات متشابهة وأُثبت التشابه |  |

# الزوايا بين قاطعين

<table>
<tr>
<td>

**نظرية9:**
إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن قياس الزاوية المحصورة بينهما تساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابل لها والذي يقابله.
مثلاً: في الشكل المجاور $\angle AEC = \frac{1}{2}[\widehat{AC} + \widehat{BD}]$

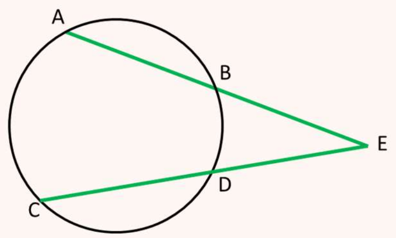
</td>
<td>




</td>
</tr>
<tr>
<td>

**نظرية10:**
إذا تقاطع وتران خارج دائرة فإن قياس الزاوية المحصورة بينهما تساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المقابل لها والذي يقابله.
مثلاً: في الشكل المجاور $\angle AEC = \frac{1}{2}[\widehat{AC} - \widehat{BD}]$

</td>
<td>

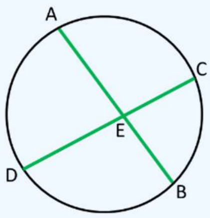



</td>
</tr>
</table>

## تدريبات:

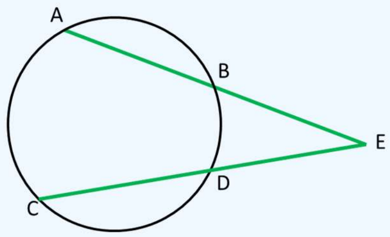
(1) على الشكل المجاور، أثبت أن:

$$\angle AEC = \frac{1}{2}[\widehat{AC} + \widehat{BD}]$$



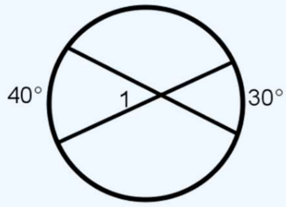

(2) في الشكل المجاور،

أثبت أن $\angle AEC = \frac{1}{2}[\widehat{AC} - \widehat{BD}]$



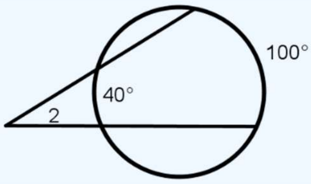

(3) في الشكل المجاور،

$m\angle 1 =$ ______



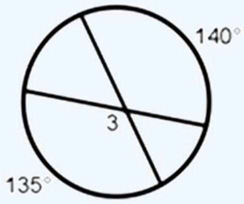

(4) في الشكل المجاور،

$m\angle 2 =$ ______



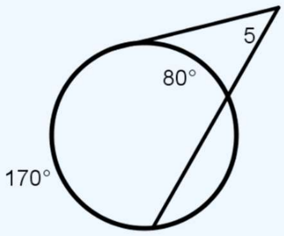

(5) في الشكل المجاور،

$m\angle 3 =$ ______



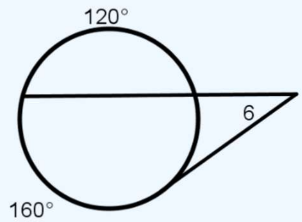

(6) في الشكل المجاور،

$m\angle 5 =$ ______



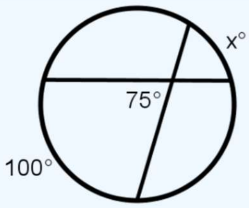

(7) في الشكل المجاور،

$m\angle 6 =$ ______



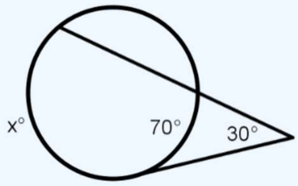

(8) في الشكل المجاور،

$x =$ ______



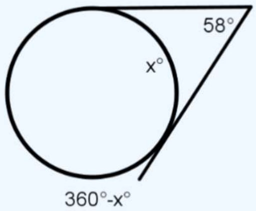

(9) في الشكل المجاور،

$x =$ ______




(10) في الشكل المجاور،

$x =$ ______



(11) على الشكل المجاور، $\overleftrightarrow{BZ}$ مماس للدائرة التي مركزها $O$ ، $\overline{AC}$ قطر فيها،

$m(\widehat{DE}) = 20°, m(\widehat{BC}) = 90°, m(\widehat{CD}) = 30°$ ، أوجد

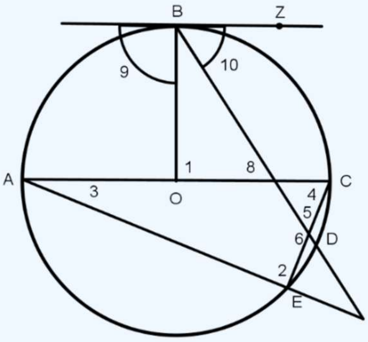
$m\angle 1 =$ ______ $, m\angle 2 =$ ______

$m\angle 3 =$ ______ $, m\angle 4 =$ ______

$m\angle 5 =$ ______ $, m\angle 6 =$ ______

$m\angle 8 =$ ______ $, m\angle 9 =$ ______

$m\angle 10 =$ ______



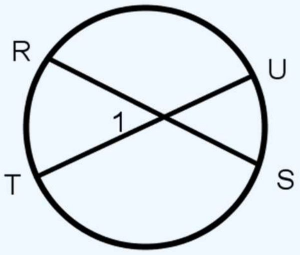

(12) على الشكل المجاور،

a) إذا كان $m\,\widehat{RT} = 80°, m\,\widehat{US} = 40°$، فإن $m\angle 1 =$ ______

b) إذا كان $m\,\widehat{RU} = 130°, m\,\widehat{TS} = 100°$، فإن $m\angle 1 =$ ______

c) إذا كان $m\,\widehat{RT} = 70°, m\angle 1 = 50°$، فإن $m\,\widehat{US} =$ ______

d) إذا كان $m\,\widehat{US} = 36°, m\angle 1 = 52°$، فإن $m\,\widehat{RT} =$ ______

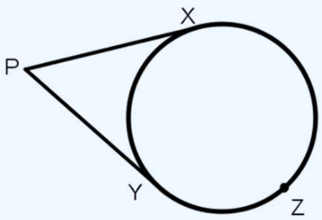



(13) على الشكل المجاور: $\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}$ مماسان

a) إذا كان $m\,\widehat{XZY} = 250°$، فإن $m\angle P =$ ______

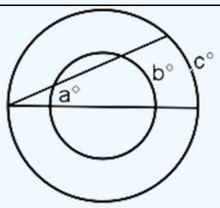
b) إذا كان $m\,\widehat{XY} = 90°$، فإن $m\angle P =$ ______

c) إذا كان $m\angle P = 85°$، فإن $m\,\widehat{XY} =$ ______



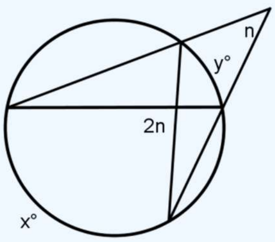

(14) على الشكل المجاور،

اكتب معادلة تحتوي $a, b, c$.




(15) على الشكل المجاور،

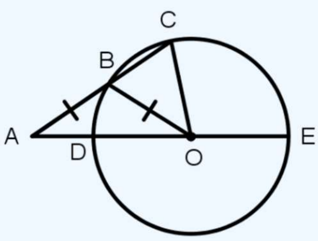
أوجد النسبة $x : y$.




(16) على الشكل المجاور، $\overline{AC}, \overline{AE}$ قاطعان للدائرة التي مركزها $O$ ،

$\overline{AB} \cong \overline{OB}$.

اكتشف ثم أثبت العلاقة بين كل من $m\,\widehat{CE}, m\,\widehat{DB}$



# الوحدة الثالثة : نظرية الاعداد

# البواقي ونظرية الباقي

## مقدمة:

عندما نقسم عدد صحيح $a$ على عدد صحيح $b$، في أغلب الحالات سيكون هناك باقي قسمة (كمثال: باقي قسمة 12 على 5 هو 2). في هذه الوحدة، سوف نصب تركيزنا على باقي القسمة. هناك الكثير من التطبيقات الحياتية والعلمية التي تعتمد على باقي القسمة، كمثال: الأمن السيبراني، والذي يمكننا من تشفير الرسائل وتأمين الأموال في البنوك ووضع كلمات المرور، يعتمد اعتمادا رئيسيا على نظرية البواقي والتي سندرسها في هذه الوحدة. بالإضافة الى بعض التمارين والأفكار لتعزيز الفهم.

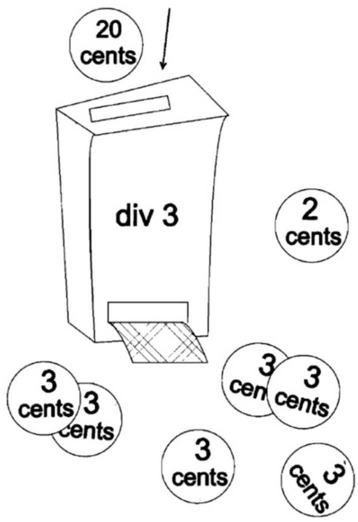
## مثال محفز:

افترض أنك في بلد تكون فيه العملات المتداولة محدودة القيم، وتريد شراء عصير مقابل 3 سنتات من آلة البيع. لديك

عملة نقدية من 15 سنت في جيبك، لكن ليس لديك أي عملات معدنية من 3 سنتات تحتاجها لشراء العصير. لحسن الحظ، ترى آلة التغيير التي يمكن أن تعطيك أي عدد من العملات المعدنية ذات 3 سنت. من الواضح أنك تحصل على خمس عملات معدنية من 3 سنتات مقابل عملة 15 سنت التي لديك.

ماذا لو كان لديك عملة 20 سنت؟ بالطبع ستحصل على ست عملات معدنية 3 سنتات زائد اثنين سنت باقي. لذلك لدينا 20 = 3 .6 + 2 (انظر الشكل التالي). هذا هو تمثيل عملية تقسيم 20 على 3 مع الباقي.

كيف تعمل آلة التغيير الخاصة بنا؟ إنها تعطي عملات معدنية 3 سنت وباقي أقل من 3. بعد ذلك تعطيك عملات معدنية لهذا الباقي، الذي يساوي 0 أو 1 أو 2.



من الواضح أن الباقي هو صفر إذا وفقط إذا كان العدد الأصلي (قيمة العملة التي تضعها في الجهاز) قابلة للقسمة على 3،على نحو مماثل، يمكننا أن نتخيل آلة تعطي عملات معدنية من طراز m-cent ستغير لك عدد من العملات ذات m-cent والباقي تتراوح قيمته من 0 إلى $m-1$ سنت. هذا الجهاز سيمثل عملية القسمة على $m$ مع الباقي.

الآن نقدم تعريفًا أكثر دقة:

عند قسمة عدد طبيعي $N$ على عدد طبيعي $m$ يمكننا كتابة ذلك كالتالي:

$$N = km + r$$

حيث $0 \leq r < m$ . سنسمي العدد $r$ الباقي عندما نقسم $N$ على $m$ .

كمثال: إذا كان $N = 92$ و $m = 17$ فإن $r = 7$ لأن:

$$92 = 5 \times 17 + 7$$

## مثال 1:

أوجد باقي قسمة العدد 277 على 32.

## الحل:

بتطبيق المعادلة أعلاه، يمكننا كتابة العدد 277 كالتالي:

$$277 = 8 \times 32 + 21$$

وبالتالي فإن الباقي هو 21.

الآن يمكننا مناقشة المسألة التالية:

شخص وضع اثنين وعشرين عملة معدنية من ذات 50 سنت، وأربعة وأربعون عملة معدنية ذات 10 سنت في آلة التغيير. ما هو الباقي بعد أن يحصل على عملات معدنية من 3 سنتات؟

هذا سهل. يكفي العثور على الباقي عندما يكون العدد $x = 22 \cdot 50 + 44 \cdot 10$ .

ما هو جدير بالملاحظة هو أنه ليس علينا حساب جميع النواتج. لنفترض أننا نستبدل كل الأعداد بالباقي عندما القسمة على 3. سيصبح الرقم $x = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1$. هذا هو الرقم 4 ، الذي له الباقي 1 عند القسمة على 3. ندعي أن باقي قسمة العدد $x$ على 3 هو أيضاً 1. السبب هو التالي:

## نظرية البواقي:

باقي قسمة مجموع (أو ضرب) عددين طبيعيين على 3 يساوي باقي قسمة مجموع (أو ضرب) الباقيين للعددين عند قسمتهم على 3.

سنثبت حالة الضرب ونترك حالة الجمع كتمرين:

إذا كان

$$\begin{aligned} N_1 &= k_1 \cdot 3 + r_1 \\ N_2 &= k_2 \cdot 3 + r_2 \end{aligned}$$

فإن

$$\begin{aligned} N_1 \cdot N_2 &= (3 \cdot k_1 + r_1)(3 \cdot k_2 + r_2) \\ &= 3^2 \cdot k_1 k_2 + 3 \cdot k_1 r_2 + 3 \cdot k_2 r_1 + r_1 r_2 \\ &= 3(3k_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) + r_1 r_2 \end{aligned}$$

وبالتالي عند تغيير $N_1 \cdot N_2$ سنتاً سيعطي الجهاز عدداً من العملات ذات 3 سنت عددها $(3k_1k_2 + k_1r_2 + k_2r_1)$ ويتبقى $r_1r_2$. لذا فإن باقي وضع $N_1 \cdot N_2$ هو نفسه باقي $r_1r_2$.

**ملاحظة هامة :**

يمكنك ملاحظة أنه يمكن تغيير المقسوم عليه 3 ونضع أي عدد طبيعي آخر يمكنك إجراء نفس الإثبات.

### مثال 2:

أوجد الباقي عند قسمة

$a$) العدد $2023 \cdot 2024 \cdot 2025 + 2026^3$ على 7.

$b$) العدد $9^{100}$ على 8.

### الحل:

$a$) الباقي يساوي نفس باقي $3^3 + 2 \cdot 1 \cdot 0$ على 7 يساوي نفس قسمة $27 + 0$ على 7 يساوي 6.

$b$) الباقي يساوي نفس باقي $1^{100}$ على 8 يساوي نفس قسمة 1 على 8 يساوي 1.

## مثال 3:

اثبت أن $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 لأي عدد طبيعي $n$.

## الحل:

عند قسمة العدد $n$ على 3 فإن الباقي إما 0 أو 1 أو 2، وهكذا نعتبر ثلاث حالات.

- إذا كان باقي قسمة العدد $n$ على 3 هو 0، فسيكون كل من $n^3, 2n$ يقبل القسمة على 3، وبالتالي $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3.

- إذا كان باقي قسمة العدد $n$ على 3 هو 1، عندها $n^3$ له الباقي 1، $2n$ له الباقي 2، و1 + 2 يقبل القسمة على 3.

- إذا كان باقي قسمة العدد $n$ على 3 هو 2، عندها $n^3$ له الباقي 2، $2n$ له الباقي 1، و2 + 1 يقبل القسمة على 3.

وهكذا في كل الحالات يثبت المطلوب.

## تدريبات:

(1) أوجد باقي قسمة 5 على 7.

(2) إذا كان $m, n$ عددين طبيعيين بحيث $m < n$. أوجد باقي قسمة $m$ على $n$.

(3) أوجد الباقي عند قسمة

a) العدد $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 2018^3$ على 9.

b) العدد $8^{100}$ على 7.

(4) إذا كان باقي قسمة $N_1$ على 3 يساوي $r_1$ وباقي قسمة $N_2$ على 3 يساوي $r_2$. اثبت أن باقي قسمة $N_1 + N_2$ على 3 يساوي باقي قسمة $r_1 + r_2$.

**أثبت أن:**

(5) $n^5 + 4n$ يقبل القسمة على 5 لأي عدد طبيعي $n$.

(6) $n^2 + 1$ لا يقبل القسمة على 3 لأي عدد طبيعي $n$.

(7) $n^3 + 2$ لا يقبل القسمة على 9 لأي عدد طبيعي $n$.

(8) $n^3 - n$ يقبل القسمة على 24 لأي عدد طبيعي فردي $n$.

(9) $p^2 - 1$ يقبل القسمة على 24 إذا كان $p$ عدد أولي أكبر من 3.

(10) $p^2 - q^2$ يقبل القسمة على 24 إذا كان كل من $p, q$ عدد أوليين أكبر من 3.

(11) (تحدي) الأعداد الطبيعية $x, y, z$ تحقق المعادلة $x^2 + y^2 = z^2$. اثبت أن أحدها على الأقل يقبل القسمة على 3.

(12) (تحدي) معطى العددان الطبيعيان $a, b$ بحيث $a^2 + b^2$ يقبل القسمة على 21. اثبت أن $a^2 + b^2$ يقبل القسمة أيضاً على 441.

(13) (تحدي) معطى الاعداد الطبيعية $a, b, c$ بحيث $a + b + c$ يقبل القسمة على 6. اثبت أن $a^3 + b^3 + c^3$ أيضاً يقبل القسمة أيضاً على 6.

(14) (تحدي) أولية $p, q, r$ كل منها أكبر من 3، تكون متتابعة حسابية كالتالي

$$p = p, q = p + d, r = p + 2d$$

اثبت أن $d$ يقبل القسمة على 6.

# الوحدة الرابعة : تركيبات

# تمارين متنوعة على مبادئ العد

(1) لدينا ثلاث غرف الأولى تتسع لشخص واحد والثانية لشخصين والثالثة لأربعة أشخاص. إذا أردنا تسكين 7 طلاب في هذه الغرف الثلاث فبكم طريقة مختلفة يمكن عمل ذلك؟

(2) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات العشر خانات التي تحوي على الأقل خانتين متطابقتين؟

(3) كم عدد الكلمات الممكن تكوينها والتي تحوي بالضبط خمسة تكرارات من الحرف A وعلى الأكثر ثلاثة تكرارات من الحرف B ولا تحوي حروف أخرى؟

(4) هل يشكل عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات السبع خانات والتي لا تحوي الخانة "1" نصف عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات السبع خانات؟

(5) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة ذات 10 خانات والتي تحقق أن مجموع خاناتها عدد زوجي؟

(6) بكم طريقة يمكن وضع 4 قلاع متماثلة (كلها من نفس اللون) على لوحة الشطرنج بشرط ألا يتقاتل أي اثنين منهم؟

(7) لدينا 6 كتب مختلفة نريد ترتيبها على رف، بشرط أن يكون كتابان معيّنان (مثلًا A و B) متجاورين دائمًا. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب؟

(8) كم عدد الطرق لاختيار لجنة مكوّنة من 3 أشخاص من بين 10 أشخاص، بشرط أن يكون جواد عضوًا في اللجنة؟

# الترتيب التصاعدي والتنازلي

في هذا الدرس نتعلّم كيفية عدّ الأعداد عندما تكون أرقامها مرتّبة ترتيبًا **تصاعديًا** أو **تنازليًا**، وسنلاحظ أن هذا الترتيب يؤثر على عدد الاحتمالات. كما سنطبّق ذلك من خلال أمثلة وتمارين متنوعة على الأعداد.

## مثال 1:

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 4 خانات مأخوذة من$\{1,2,3,4,5,6\}$ بحيث تكون مرتبة تصاعدياً ؟

## الحل :

لدينا الأرقام:

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

نريد تكوين **عدد من 4 أرقام** بحيث تكون الأرقام:

- مأخوذة من هذه المجموعة
- مرتبة تصاعديًا

ملاحظة مهمة: الترتيب التصاعدي أو التنازلي يعني **لا يوجد تكرار**، لأن الأرقام يجب أن تكون مختلفة.

عندما تكون الأرقام **مرتبة تصاعديًا**، فهذا يعني:

- نختار 4 أرقام مختلفة من أصل 6
- **الترتيب يصبح تلقائيًا محددًا** (من الأصغر إلى الأكبر)

إذن تتحول المسألة إلى: كم طريقة نختار بها 4 أرقام من 6 دون اعتبار للترتيب؟

وهذا هو تعريف **التوافيق**

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\ 2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

**ماذا لو كانت المجموعة تحتوي على الصفر؟**

ما الاختلاف الذي سيظهر في الحل؟

نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

## مثال 2:

بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 4 خانات مأخوذة من { 0,1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } بحيث تكون مرتبة تصاعدياً

## الحل :

المجموعة هي { 0,1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

نريد تكوين **عدد من 4 خانات** بحيث تكون الأرقام **مرتبة تصاعديًا**

**ملاحظة مهمة :**

قولنا **"عدد من 4 خانات"** يعني **عددًا رباعيًّا**، أي أن:

- الرقم الأول **لا يمكن أن يكون صفراً**.

وبما أن العدد **مرتّب تصاعديًا**:

فإن الرقم الأول يمثل أصغر رقم في العدد.

إذن لا يمكن استخدام الصفر، لأنه لو استُخدم لاحتل الخانة الأولى، مما يجعل العدد غير رباعي.

إذن نستبعد الصفر، فتصبح المجموعة : { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 }

وعندئذٍ:

- نختار فقط 4 أرقام من أصل 6
- ويكون ترتيبها تصاعديًا محددًا تلقائيًا.

لذلك نستخدم التوافيق كما في المثال السابق $\binom{6}{4}$.

**الخلاصة:**

*نستنتج مما سبق أنه عند كون الترتيب **تصاعديًا** فإن وجود الصفر يؤثر في الحل، لأنه يمثل أصغر رقم ويشغل الخانة الأولى، مما يؤدي إلى عدم تكوّن عدد بعدد خانات محدد، لذلك يجب استبعاده عند الاختيار.*

*أما إذا كان الترتيب **تنازليًا** فإن طريقة الحل تبقى نفسها، ولا يؤثر وجود الصفر من عدمه، لأن الخانة الأولى تكون مشغولة بأكبر رقم، ولا يمكن أن يكون الصفر فيها.*

## تدريبات:

(1) كم عدد من الأعداد $100,101,....,999$ أرقامه الثلاثة في ترتيب تصاعدي أو تنازلي من اليسار؟

(2) بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 5 خانات مأخوذة من $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بحيث تكون:

a) مرتبة تصاعدياً.

b) مرتبة تنازلياً.

(3) بكم طريقة يمكن تكوين عدد من 4 خانات مأخوذة من $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بحيث تكون:

a) مرتبة تصاعدياً.

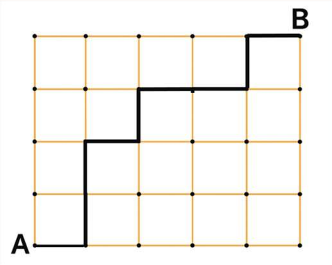
b) مرتبة تنازلياً.

(4) لدى محمد عشر كروت مرقمة من 1 إلى 10 وسيلعب مع أخيه سالم بإن يسحب سالم ثلاث كروت بشكل متلاحق وبدون ارجاع. سيفوز سالم إذا سحب 3 كروت تحمل أعداد مرتبة تصاعديا وإلا سيفوز محمد في اللعبة. فمن هو صاحب حظ الفوز أكثر سالم أو محمد. وكم نسبة فوز أحدهم على الأخر؟

# عدد المسارات على شبكة

## مثال:

لدينا شبكة من النوع $5 \times 4$ كم عدد المسارات على الشبكة من النقطة $A$ الى النقطة $B$ والتي في اتجاه الاعلى و الى اليمين فقط ؟




## الحل :

نرمز لعدد الحركات الى الأعلى $U$ والحركات الى اليمين $R$

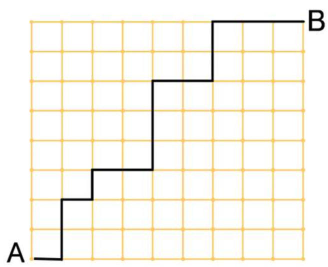
للتحرك من النقطة $A$ الى النقطة $B$ فقط للأعلى أو لليمين نحتاج $4$ حركات للأعلى و $5$ حركات الى اليمين , ابي

تسلسل مثل $UUUURRRRR$ , المجموع = 4 + 5 = 9

عدد طرق ترتيبهم = $\frac{9!}{4! \times 5!}$ ويمكن حلها أيضا بحساب عدد طرق اختيار 4 أماكن من 9 أماكن لوضع $U$

وتساوي $126 = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}$

وبشكل عام إذا كان لدينا شبكة من نوع $m \times n$ كما في الشكل

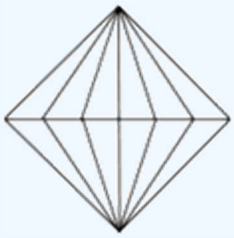



عدد المسارات الأقصر للوصول من $A$ إلى $B$ على الشبكة $m \times n$ يساوي $\binom{m+n}{m}$

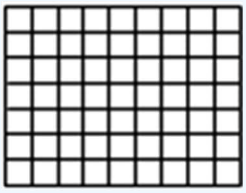
## تدريبات:

(1) يقف ضفدع عند نقطة الأصل (0) على المحور السيني، ويقفز في كل مرة خطوة واحدة إمّا إلى الأمام أو إلى الخلف. إذا قفز الضفدع 13 خطوة، فبكم طريقة يمكن أن ينتهي به المطاف عند النقطة −1؟

(2) كم عدد المثلثات في الشكل التالي:



(3) كم عدد المستطيلات في الشكل التالي؟



(4) لوحة سيارات مدينة ما (بدءاً من اليسار) تتكون من حرفين مرتبين أبجديا ويتبعهما خانتين مرتبتين تصاعدياً مثلا RE64. إذا لم نستخدم الحرف O ولم نستخدم العدد 0، فكم عدد اللوحات المختلفة في هذه المدينة؟

(5) على باب ثلاجة يوجد 9 قطع مغناطيس مكتوب على كل واحدة منها حروف من أحرف الكلمة MATHCOUNT سنأخذ حرفين عله وثلاث أحرف ساكنه منها ونضعها في كيس وبفرض أن حرفي T غير متمايزين، كم عدد الإمكانيات المختلفة الموجودة في الكيس من الأحرف؟

# النجوم والأشرطة

تستخدم استراتيجية **النجوم والأشرطة** في حل المسائل التي تتطلب حساب عدد الطرق التي يوزع بها $n$ عنصر متشابه على $k$ قسم مختلف (جزء).

**ونضرب مثال بسيط لتتضح الفكرة.**

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع $n$ من الاشياء المتشابهة على $k$ صندوق مختلف. نمثل الـ$n$ كرة كنجوم ونستخدم $k-1$ شريط لتحديد حصص الـ $k$ صندوق لنحصل على

$$\underbrace{**\ldots*}_{n times}\ \underbrace{||\ldots|}_{k-1 times}$$

وهنا يمكن عد الطرق المطلوبة بعد طرق ترتيب النجوم والاشرطة والتي عددها $\binom{n+k-1}{k-1}$ طريقة.

ويجب ان نراعي الشروط المعطاة في حال استخدام النجوم والشرطة لحل مسألة ما.

## مثال:

لدى عبد الله 6 ريالات ويريد أن يوزعها على أربعة من إخوته محمد، معاذ، سمير، جابر. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

## الحل :

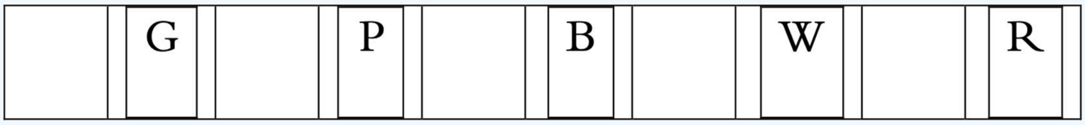
لدينا 6 نجوم ( * ) و3 أشرطة ( | ) ولا توجد شروط للتوزيع بالتالي عدد الطرق يساوي

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!} = 84$$

## تدريبات:

(1) عشرة صناديق متطابقة ستقسم على 3 غرف بحيث كل غرفة يكون فيها صندوق واحد على الاقل، ويجب ان يوضع كل صندوق في غرفة. كم عدد طرق عمل ذلك؟

(2) عشرة مواقف سيارات في صف واحد ويوجد خمس سيارات مختلفة الالوان ستقف فيها بشرط عدم تجاور أي سيارتين، مثلا كما في الشكل:




بكم طريق يمكنهم الوقوف تحت هذا الشرط؟

(3) كم عدد الحلول الصحيحة الغير سالبة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$ ؟

(4) كم عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$ ؟

(5) في أحد مواقع ايقاف السيارات هناك 16 موقف سيارات متجاور. سيارة سجاد تحتاج موقفين متجاورين للاصطفاف. اذا وصلت 12 سيارة صغيرة قبل وصول سجاد فما احتمال أن يستطيع سجاد صف سيارته؟

(6) تسعة كراسي في صف يجلس عليها 6 طلاب وثلاثة أساتذة. إذا وصل المعلمين أولا وقرروا أن يجلس كل منهم بين طالبين. فبكم طريقة يمكن أن يجلس الجميع

# أسئلة التحدي

(1) من فريق كرة قدم مكون من 12 لاعب، ارادت ادارة الفريق اختيار 4 لاعبين منهم بحيث لا يمكن ان يكون سعد وسعيد من الاربعة المختارين في آن واحد. بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

(2) كم عدد الاعداد الزوجية المكونة من 6 خانات بحيث تكون خاناته مرتبة تنازليا من اليسار؟

(3) في احتفالات العيد، تريد فرح توزيع 15 قطعة من الحلوى على 3 اطفال بحيث ياخذ كل منهم قطعة على الاقل وياخذ الطفل الاول 7 قطع على الاكثر. بكم طريقة يمكن ذلك؟

(4) بكم طريقة يمكن وضع 8 قلاع متماثلة (كل أربع من نفس اللون) على لوحة الشطرنج بشرط ألا يتقاتل أي اثنين منهم؟

(5) بكم طريقة يمكن لمجموعة مكونة من 50 طالب و 50 معلم أن يتناولول العشاء في مطعم بشرط أن كل طاولة يجلس عليها طالب واحد ومعلم واحد، علما بأن الطاولات متمايزة واماكن الجلوس متمايزة؟

(6) 8 أصدقاء يجلسون حول طاولة دائرية. كم عدد الطرق بحيث يجلس شخصان محددان متجاورين دائمًا، وشخص ثالث لا يكون بجواره أي منهما؟

# حلول التدريبات

## الحلول (الجبر)

### معادلة الدرجة الثانية:

تدريبات:

**(1)**

$(\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{x^2-12x-540=0}$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما $-540$ ومجموعهما $-12$

نجد العددين هما $18, -30$

$\Longrightarrow x^2-12x-540=(x-30)(x+18)=0$

$\Longrightarrow x=30\ or\ x=-18$

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{3x^2=10x+24}$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد $\Longrightarrow 3x^2-10x-24=0$

$a=3, b=-10, c=-24 \Longrightarrow\ \Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(3)(-24)=100+288=388$

$$\therefore x=\frac{10\pm\sqrt{388}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{97}}{3}$$

$$\Longrightarrow x=\frac{5+\sqrt{97}}{3}\quad or\quad x=\frac{5-\sqrt{97}}{3}$$

$(\boldsymbol{c})\ \boldsymbol{(x^4-11x^3+24x^2)-(4x^2-44x+96)=0}$

$\Longrightarrow x^2(x^2-11x+24)-4(x^2-11x+24)=0$

$\Longrightarrow (x^2-11x+24)(x^2-4)=0$

$\Longrightarrow (x-8)(x-3)(x-2)(x+2)=0$

$\Longrightarrow x=8\ or\ 3\ or\ 2\ or -2$

**(2)**

$ax^2-5x+9=0$

يكون للمعادلة حل واحد إذا كان $\Delta=0$ أي أن:

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(a)(9)=0$

$\Longrightarrow 25-36a=0$

$$\Longrightarrow a=\frac{25}{36}$$

**(3)**

$$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$$

**الحالة الأولى:** أن يكون الأس مساوياً للصفر (بشرط ألا يكون الأساس صفراً).

$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$

وعند $x = -2$ فإن الأساس لا يساوي الصفر.

**الحالة الثانية:** أن يكون الأساس مساوياً لـ 1.

$x^2 - x - 1 = 1 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 2 \text{ } or \text{ } x = -1$

**الحالة الثالثة:** أن يكون الأساس مساوياً لـ $(-1)$ بشرط أن يكون الأس عدداً زوجياً.

$x^2 - x - 1 = -1 \Longrightarrow x^2 - x = 0 \Longrightarrow x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ } or \text{ } x = 1$

وعند $x = 0$ فأن الأس:

$$x + 2 = 0 + 2 = 2$$

وهذا عدد زوجي، وبالتالي تكون المعادلة صحيحة.

ولكن عند $x = 1$ فأن الأس:

$$x + 2 = 1 + 2 = 3$$

وهذا عدد فردي، وبالتالي المعادلة غير صحيحة.

إذًا قيم $x$ الصحيحة التي تجعل المعادلة صحيحة هي: $\{-2,2,-1,0\}$، وعددها أربع قيم.

**(4)**

نستخدم علاقات فيتا لحاصل ضرب الجذرين فبفرض أن الجذر الثاني للمعادلة:

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$$

هو $r$ ، فإن حاصل ضرب الجذرين يعطى بالعلاقة:

$$r \cdot 1 = r = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$$

**(5)**

بما أن $a, b$ جذرا المعادلة $x^2 - mx + 2 = 0$ فإن:

$$ab = 2$$

بما أن $a + \frac{1}{b}, b + \frac{1}{a}$ جذرا المعادلة $x^2 - px + q = 0$ فإن:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + 2 + \frac{1}{ab} = q$$
$$\Rightarrow q = 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

**(6)**

$$\begin{cases} x^2 + xy = 39 \longrightarrow (1) \\ x - y = -33 \longrightarrow (2) \\ y + z = 13 \longrightarrow (3) \end{cases}$$

من المعادلة $(2)$ نجد $y = x + 33$ ، وبالتعويض في $(1)$ نحصل على:

$$x^2 + x(x + 33) = 39$$
$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 33x - 39 = 0$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 33x - 39 = 0$$

وباستخدام القانون العام نحصل على:

$$a = 2, b = 33, c = -39 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 33^2 - 4(2)(-39) = 1401$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-33 \pm \sqrt{1401}}{2(2)}$$
$$\Rightarrow x = \frac{-33 \pm \sqrt{1401}}{4}$$

بالتعويض عن قيم $x$ في المعادلات $(2), (3)$ نحصل على:

$$y = x + 33 \Rightarrow y = \frac{-33 \pm \sqrt{1401}}{4} + 33 = \frac{99 \pm \sqrt{1401}}{4}$$
$$z = 13 - y \Rightarrow z = 13 - \frac{99 \pm \sqrt{1401}}{4} = \frac{-47 \mp \sqrt{1401}}{4}$$

وبالتالي للنظام حلان:

$$\left(\frac{-33 + \sqrt{1401}}{4}, \frac{99 + \sqrt{1401}}{4}, \frac{-47 - \sqrt{1401}}{4}\right), \left(\frac{-33 - \sqrt{1401}}{4}, \frac{99 - \sqrt{1401}}{4}, \frac{-47 + \sqrt{1401}}{4}\right)$$

**(7)**

افرض المعادلة على الصورة $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ، وبما أن $P(0) = -1$ فإن:

$$P(0) = a(0)^2 + b(0) + c = -1 \Longrightarrow c = -1$$

وبما أن $P(1) = 9$ فإن:

$$P(1) = a(1)^2 + b(1) - 1 = 9 \Longrightarrow a + b = 10 \longrightarrow (1)$$

وبما أن $P(2) = 25$ فإن:

$$P(2) = a(2)^2 + b(2) - 1 = 25 \Longrightarrow 4a + 2b = 26 \Longrightarrow 2a + b = 13 \longrightarrow (2)$$

وبطرح $(1)$ من $(2)$ نحصل على:

$$a = 3 \Longrightarrow b = 7$$

إذًا:

$$P(-1) = 3(-1)^2 + 7(-1) - 1 = 3 - 7 - 1 = -5$$

**(8)**

ليكون للمعادلة $x^2 + kx + 27 = 0$ جذران حقيقيان ومختلفان يجب أن يكون $\Delta > 0$

$$\Delta = k^2 - 4(1)(27) = k^2 - 108 > 0$$
$$\Longrightarrow k^2 > 108 \Rightarrow |k| > \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

إذًا:

$$k > 6\sqrt{3} \quad or \quad k < -6\sqrt{3}$$

**(9)**

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{a+b}$$
$$\Longrightarrow (a+b)^2 = ab$$
$$\Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = ab$$
$$\Longrightarrow a^2 + ab + b^2 = 0$$

وباستخدام القانون العام نحصل على:

$$\Delta = (b)^2 - 4(1)(b^2) = -3b^2$$

- إذا $b \neq 0$ فإن $\Delta < 0$ وبالتالي لا حلول حقيقية لـ $a$.
- إذا $b = 0$ تصبح المعادلة الأصلية $\frac{a}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow 1 = 0$ وهذا مستحيل

وبالتالي لا يمكن أن يكون كل من $a, b$ أعدادً حقيقية.

**(10)**

$(2+(2+(2+(2+x)^2)^2)^2)^2 = 15129$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين مع استبعاد القيمة السالبة لأن الطرف الأيسر موجب:

$\Longrightarrow 2+(2+(2+(2+x)^2)^2)^2 = 123$
$\Longrightarrow (2+(2+(2+x)^2)^2)^2 = 121$

نأخذ الجذر التربيعي مرة أخرى ولأن الطرف الأيسر موجب:

$\Longrightarrow 2+(2+(2+x)^2)^2 = 11$
$\Longrightarrow (2+(2+x)^2)^2 = 9$

بنفس الطريقة:

$\Longrightarrow 2+(2+x)^2 = 3$
$\Longrightarrow (2+x)^2 = 1$
$\Longrightarrow 2+x = \pm 1$
$\Longrightarrow x = -1 \ or -3$

(11)

لدينا $x^2+y=12=y^2+x$ ومنه:

$$x^2+y=y^2+x$$

$$\Longrightarrow x^2-y^2+y-x=0$$
$$\Longrightarrow (x^2-y^2)-(x-y)=0$$
$$\Longrightarrow (x-y)(x+y)-(x-y)=0$$
$$\Longrightarrow (x-y)(x+y-1)=0$$

إذاً لدينا الحالتين التالية:

$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{x-y=0}$

$$\Longrightarrow x=y$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على:

$$x^2+x=12 \Longrightarrow x^2+x-12=0 \Longrightarrow (x+4)(x-3)=0 \Longrightarrow (x,y)=(-4,-4),(3,3)$$

$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{x+y-1=0}$

$$\Longrightarrow y=1-x$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على:

$$x^2+1-x=12 \Longrightarrow x^2-x-11=0$$

وباستخدام القانون العام نجد:

$$a=1, b=-1, c=-11 \ \Longrightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4(1)(-11)=45$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Longrightarrow x=\frac{1\pm 3\sqrt{5}}{2}$$
$$\Longrightarrow y=1-\frac{1\pm 3\sqrt{5}}{2}=\frac{1\mp 3\sqrt{5}}{2}$$

وبالتالي فإن الحلول التي تحقق النظام هي:

$$(x,y)=(-4,-4),(3,3),\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{2},\frac{1-3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-3\sqrt{5}}{2},\frac{1+3\sqrt{5}}{2}\right)$$

**(12)**

$$\begin{cases} 2x_1 = x_5^2 - 23 \\ 4x_2 = x_1^2 + 7 \\ 6x_3 = x_2^2 + 14 \\ 8x_4 = x_3^2 + 23 \\ 10x_5 = x_4^2 + 34 \end{cases}$$

بجمع المعادلات وترتيب الحدود نحصل على:

$$(x_1^2 - 2x_1) + (x_2^2 - 4x_2) + (x_3^2 - 6x_3) + (x_4^2 - 8x_4) + (x_5^2 - 10x_5) + 55 = 0$$

وبإكمال المربع لكل قوس نحصل على:

$$(x_1^2 - 2x_1 + 1) + (x_2^2 - 4x_2 + 4) + (x_3^2 - 6x_3 + 9) + (x_4^2 - 8x_4 + 16) + (x_5^2 - 10x_5 + 25) = 0$$
$$\Longrightarrow (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2 + (x_5 - 5)^2 = 0$$

وبما أن مجموع المربعات يساوي صفر فإن كل قوس يساوي صفر وبالتالي:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$$

## 2- أشكال أخرى للمتطابقات:

### تدريبات:

**(1)**

$$a)\ (a+b)^2-(a-b)^2=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$
$$=4ab$$

$$b)\ (a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2b-3ab^2$$
$$=a^3-b^3$$

$$c)\ (a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2$$
$$=a^3+b^3$$

$$d)\ \sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab}$$
$$=\sqrt{a^2-2ab+b^2}$$
$$=\sqrt{(a-b)^2}$$
$$=|a-b|$$

**(2)**

$$a)\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca]$$
$$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bc+c^2)]$$
$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$$

$$b)\ (a+b+c)^3=\big((a)+(b+c)\big)^3$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3a(b^2+2bc+c^2)+(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+2abc)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3[(a^2b+ab^2)+(abc+b^2c)+(ac^2+bc^2)+(a^2c+abc)]$$
$$=a^3+b^3+c^3+3[ab(a+b)+bc(a+b)+c^2(a+b)+ac(a+b)]$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)[ab+bc+c^2+ac]$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)[b(a+c)+c(c+a)]$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

**(3)**

المعطيات: $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=3$ حيث $x$ عدد حقيقي والمطلوب: $x^3+\frac{1}{x^3}$

بفرض $\sqrt[3]{x}=a$ فإن $x=a^3$

$$\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=3$$
$$\Longrightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^3=3^3$$
$$\Longrightarrow a^3+\frac{1}{a^3}+3(a)(\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})=27$$
$$\Longrightarrow a^3+\frac{1}{a^3}+3(3)=27$$
$$\Longrightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=x+\frac{1}{x}=27-9=18$$
$$\Longrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=18^3$$
$$\Longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3(x)(\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})=5832$$
$$\Longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}+3(18)=5832$$
$$\Longrightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=5832-54=5778$$

**(4)**

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$$
$$\Longrightarrow \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^3=2^3$$
$$\Longrightarrow \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)=8$$
$$\Longrightarrow 1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+3\left(\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\right)(2)=8$$
$$\Longrightarrow 2+6\left(\sqrt[3]{1-x}\right)=8$$
$$\Longrightarrow \sqrt[3]{1-x}=1$$
$$\Longrightarrow 1-x=1$$
$$\Longrightarrow x=0$$

**(5)**

افرض:

$$X = (a-b)(a+b-c) = a^2 + ab - ac - ab - b^2 + bc = 3$$
$$Y = (b-c)(b+c-a) = b^2 + bc - ab - bc - c^2 + ac = 5$$
$$Z = (c-a)(a+c-b) = ac + c^2 - bc - a^2 - ac + ab$$
$$\Longrightarrow X + Y + Z = 0$$
$$\Longrightarrow 3 + 5 + Z = 0$$
$$\Longrightarrow Z = -8$$

**(6)**

يجب أن يكون ما بداخل الجذور أكبر من أو يساوي صفراً لذلك $2 \le x \le 4$

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x}$$
$$\Longrightarrow \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2 = \left(\sqrt{6-x}\right)^2$$
$$\Longrightarrow x - 2 + 4 - x + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} = 6 - x$$
$$\Longrightarrow 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} = 6 - x$$
$$\Longrightarrow 2\sqrt{(x-2)(4-x)} = 4 - x$$
$$\Longrightarrow 4(x-2)(4-x) = (4-x)^2$$
$$\Longrightarrow 4(x-2)(4-x) - (4-x)^2 = 0$$
$$\Longrightarrow (4-x)[4(x-2) - (4-x)] = 0$$
$$\Longrightarrow (4-x)(4x - 8 - 4 + x) = 0$$
$$\Longrightarrow (4-x)(5x-12) = 0$$
$$\Longrightarrow x = 4 \ \ or\ x = \frac{12}{5}$$

**(7)**

$$ab(x^2+1) = (a^2+b^2)x$$
$$\Longrightarrow abx^2 + ab = a^2x + b^2x$$
$$\Longrightarrow abx^2 - a^2x - b^2x + ab = 0$$
$$\Longrightarrow ax(bx-a) - b(bx-a) = 0$$
$$\Longrightarrow (bx-a)(ax-b) = 0$$
$$\Longrightarrow x = \frac{a}{b} \quad or \quad x = \frac{b}{a}$$

**(8)**

افرض أن $y = \sqrt{x-10}$

$$\sqrt{x-10} - \frac{6}{\sqrt{x-10}} = 5$$
$$\Longrightarrow y - \frac{6}{y} = 5$$
$$\Longrightarrow y^2 - 6 = 5y$$
$$\Longrightarrow y^2 - 6 = 5y$$
$$\Longrightarrow y^2 - 5y - 6 = 0$$
$$\Longrightarrow (y-6)(y+1) = 0$$
$$\Longrightarrow y = 6 \;\; or \;\; y = -1$$

$y = -1$ مرفوض لأن قيمة الجذر التربيعي لا تكون سالبة

$$\Longrightarrow y = 6 \Longrightarrow \sqrt{x-10} = 6 \Longrightarrow x - 10 = 36 \Longrightarrow x = 46$$

**(9)**

$$\frac{(2x-1)^2}{2} + \frac{(3x-1)^2}{3} + \frac{(6x-1)^2}{6} = 1$$

$$\Longrightarrow 3(2x-1)^2 + 2(3x-1)^2 + (6x-1)^2 = 6$$

$$\Longrightarrow 3(4x^2 - 4x + 1) + 2(9x^2 - 6x + 1) + (36x^2 - 12x + 1) = 6$$

$$\Longrightarrow 12x^2 - 12x + 3 + 18x^2 - 12x + 2 + 36x^2 - 12x + 1 = 6$$

$$\Longrightarrow 66x^2 - 36x + 6 = 6$$

$$\Longrightarrow 66x^2 - 36x = 0$$

$$\Longrightarrow 6x(11x - 6) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \;\; or \;\; x = \frac{6}{11}$$

# التحليل إلى عوامل:

## تدريبات(3-1):

**(1)**

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
$$=(a+b)[(a+b)^2-3ab]$$
$$=(a-b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$$
$$=(a-b)(a^2-ab+b^2)$$

**(2)**

$$x^2-(a+b)x+ab=x^2-ax-bx+ab$$
$$=x(x-a)-b(x-a)$$
$$=(x-a)(x-b)$$

**(3)**

$$x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab$$
$$=x(x+a)+b(x+a)$$
$$=(x+a)(x+b)$$

**(4)**

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$$
$$=(x^2)^2+2x^2+1-x^2$$
$$=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+1-x)(x^2+1+x)$$
$$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

**(5)**

$$x^4+2x^3+2x^2+2x+1=(x^2)^2+2x^2+1+2x^3+2x$$
$$=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)$$
$$=(x^2+1)(x^2+1+2x)$$
$$=(x^2+1)(x+1)^2$$

**(6)**

$$x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1$$
$$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^2(x-1)+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

**(7)**

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y)+4(y-1) &= x^2-y^2+4y-4\\ &= x^2-(y^2-4y+4)\\ &= x^2-(y-2)^2\\ &= (x-y+2)(x+y-2)\end{aligned}$$

**(8)**

$$\begin{aligned}x^3(x-2y)+y^3(2x-y) &= x^4-2x^3y+2xy^3-y^4\\ &= (x^4-y^4)-2xy(x^2-y^2)\\ &= (x^2-y^2)(x^2+y^2)-2xy(x^2-y^2)\\ &= (x^2-y^2)(x^2+y^2-2xy)\\ &= (x^2-y^2)(x-y)^2\\ &= (x+y)(x-y)(x-y)^2\\ &= (x+y)(x-y)^3\end{aligned}$$

**(9)**

$$x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$$

$$=(x^2y-x^2z)+(z^2x+y^2x-2xyz)-(y^2z-z^2y)$$

$$=x^2(y-z)+x(z^2+y^2-2yz)-yz(y-z)$$

$$=x^2(y-z)+x(y-z)^2-yz(y-z)$$

$$=(y-z)(x^2+x(y-z)-yz)$$

$$=(y-z)(x^2+xy-xz-yz)$$

$$=(y-z)\big(x(x+y)-z(x+y)\big)$$

$$=(y-z)(x-z)(x+y)$$

**(10)**

$$1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc$$

$$= (1 + a) + (b + ab) + (c + ca) + (bc + abc)$$

$$= (1 + a) + b(1 + a) + c(1 + a) + bc(1 + a)$$

$$= (1 + a)(1 + b + c + bc)$$

$$= (1 + a)((1 + b) + c(1 + b))$$

$$= (1 + a)(1 + b)(1 + c)$$

**(11)**

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 + c^2x^2 + c^2y^2$$

$$= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 + c^2x^2 + c^2y^2$$

$$= a^2x^2 + b^2x^2 + c^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + c^2y^2$$

$$= x^2(a^2 + b^2 + c^2) + y^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2)$$

**(12)**

$$(c + \frac{1}{c} + 1)(c + \frac{1}{c}) = 1$$
$$\Rightarrow c^2 + 1 + 1 + \frac{1}{c^2} + c + \frac{1}{c} = 1$$
$$\Rightarrow c^2 + c + 1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} = 0$$

بالضرب في $c^2$ حيث $c \neq 0$

$$\Rightarrow c^4 + c^3 + c^2 + c + 1 = 0$$

بالضرب في $(c - 1)$ حيث $c \neq 1$

$$\Rightarrow (c - 1)(c^4 + c^3 + c^2 + c + 1) = 0$$
$$\Rightarrow c^5 - 1^5 = 0$$
$$\Rightarrow c^5 = 1$$
$$\Rightarrow c^{100} = 1$$
$$\Rightarrow \left(3c^{100} + \frac{2}{c^{100}} + 1\right)\left(c^{100} + \frac{2}{c^{100}} + 3\right) = (3 + 2 + 1)(1 + 2 + 3) = 36$$

## تدريبات(3-2):

**(1)**

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Longrightarrow (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$\Longrightarrow (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 = 3(5)(10)(15)$$
$$\Longrightarrow (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 = 2250$$

**(2)**

افرض $a = x-2009\,, b = x-2010\,, c = x-2011$

$$(x-2009)^3+(x-2010)^3+(x-2011)^3 = 3(x-2009)(x-2010)(x-2011)$$
$$\Longrightarrow a^3+b^3+c^3 = 3abc$$
$$\Longrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc = 0$$
$$\Longrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)[(1)^2+(1)^2+(-2)^2] = 0$$
$$\Longrightarrow (a+b+c) = 0$$
$$\Longrightarrow x-2009+x-2010+x-2011 = 0$$
$$\Longrightarrow 3x-6030 = 0$$
$$\Longrightarrow x = \frac{6030}{3} = 2010$$

**(3)**

افرض $x = a+b-c\,, y = c+b-a\,, z = a-b+c$

$$\Longrightarrow x+y+z = a+b+c \quad , \quad x+y = 2b \quad , \quad y+z = 2c \quad , \quad x+z = 2a$$
$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(x+z) \\ &= (a+b+c)^3-3(2b)(2c)(2a) \\ &= (a+b+c)^3-24abc \end{aligned}$$

الآن لدينا

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(c+b-a)^3-(a-b+c)^3-23abc$$
$$= (a+b+c)^3-(x^3+y^3+z^3)-23abc$$
$$= (a+b+c)^3-(a+b+c)^3+24abc-23abc$$
$$= abc$$
$$= (2009)(2010)(\frac{1}{2010})$$
$$= 2009$$

**(4)**

$\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x}=0$

افرض $a=\sqrt[3]{x-3}\ ,\ b=\sqrt[3]{x+3}\ ,\ c=-\sqrt[3]{x}$ نجد أن:

$$a+b+c=0 \Longrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$\Longrightarrow x-3+x+3-x=-3\sqrt[3]{(x-3)(x+3)x}$$
$$\Longrightarrow x=-3\sqrt[3]{(x^2-9)x}$$
$$\Longrightarrow x^3=-27(x^2-9)x$$
$$\Longrightarrow x^3=-27x^3+243x$$
$$\Longrightarrow 28x^3-243x=0$$
$$\Longrightarrow x(28x^2-243)=0$$
$$\Longrightarrow x=0\ \ or\ x=\pm\sqrt{\frac{243}{28}}=\pm\frac{9\sqrt{21}}{14}$$

# علاقات فيتا:

## تدريبات:

**(1)**

$2x^2 - 3x + m = 0$

من علاقات فيتا:

$$a + b = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \quad , \qquad ab = \frac{m}{2}$$

نعوض عن قيمة $a = 2b$

$$a + b = 2b + b = 3b = \frac{3}{2} \Longrightarrow b = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow a = 2b = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

الآن بالتعويض عن قيمة $a, b$

$$ab = \frac{m}{2} \Longrightarrow (1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{m}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \Longrightarrow m = 1$$

**(2)**

من علاقات فيتا نجد:

$$a + b + c = 5 \, , ab + bc + ac = 12 \, , abc = 19$$
$$i)\ a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 5^2 - 2(12) = 25 - 24 = 1$$
$$ii)\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} = \frac{a + b + c}{abc} = \frac{5}{19}$$

**(3)**

الصورة العامة لكثيرة الحدود هي:

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = 0$$

من المعطيات نجد:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{-3}{32}$$
$$\Longrightarrow \frac{a + b + c}{abc} = \frac{-3}{32}$$
$$\Longrightarrow a + b + c = \left(\frac{-3}{32}\right)(-64) = 6$$

ولدينا أيضًا:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)$$
$$\Longrightarrow 84 = (6)^2 - 2(ab + bc + ac)$$
$$\Longrightarrow 2(ab + bc + ac) = 36 - 84$$
$$\Longrightarrow ab + bc + ac = \frac{-48}{2} = -24$$

اذًا كثيرة الحدود المطلوبة:

$$x^3 - 6x^2 - 24x + 64 = 0$$

**(4)**

$$\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\beta}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\delta}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)\left(\sqrt[3]{\beta}\right)\left(\sqrt[3]{\delta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}\right)\left[\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta+\delta-3\sqrt[3]{\alpha\beta\delta}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}\right)\left[\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow -3-3(-1)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}\right)\left[\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow 0=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}\right)\left[\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}\right)\left[\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right]=0$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}=0 \;\; or \left[\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2\right]=0$$

لكن $\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\delta}\right)^2$ يساوي الصفر إذا كانت $\sqrt[3]{\alpha}=\sqrt[3]{\beta}=\sqrt[3]{\delta}$

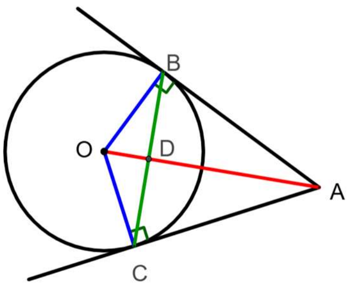
وبالتالي $\alpha=\beta=\delta$ ولأن $\alpha\beta\delta=-1$ سيكون $\alpha=\beta=\delta=-1$ وفي نفس الوقت $\alpha\beta+\beta\delta+\alpha\delta=-24$

وهذا مستحيل، إذًا $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\delta}=0$ وهو المطلوب اثباته.

# حلول (الهندسة)

## تدريبات الدائرة:

(1)




a) $\angle ABO = \angle ACO = 90°$

$\Delta ABO \cong \Delta ACO \quad (HL) \Rightarrow$

b) $AB = AC$

c) $\angle AOB = \angle AOC$

d) $\angle BAO = \angle CAO$

e) $\Delta ABD \cong \Delta ACD \quad (SAS)$

$\Rightarrow m\angle ADB = m\angle ADC$

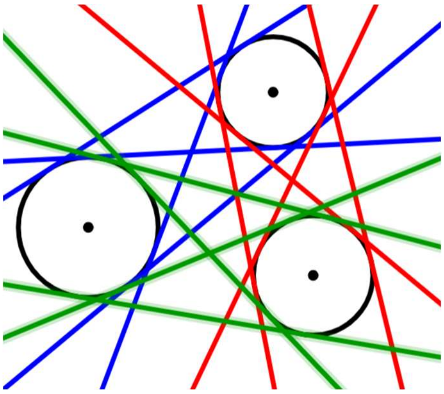
$but\ m\angle ADB + m\angle ADC = 180°$

$\Rightarrow m\angle ADB = m\angle ADC = 90 \ \Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{BD}$

(2)

لكل دائرتين 4 مماسات مشتركة

عدد المماسات المشتركة = 12

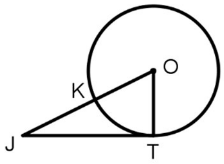


(3)

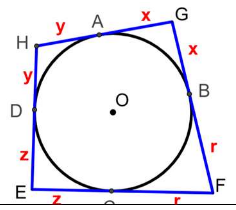
a) $JT = 12$

b) $JT = 10\sqrt{3}$

c) $JT = 15$

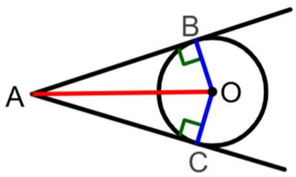



(4)




$.HG + EF = HE + GF = x + y + z + r$

(5)



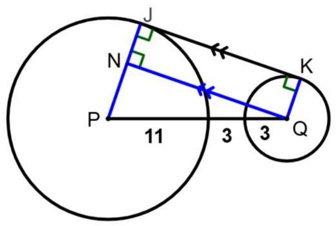

$\angle ABO = \angle ACO = 90°$

$\Delta ABO \cong \Delta ACO \quad (HL) \Rightarrow$

$\angle BAO = \angle CAO \Rightarrow$

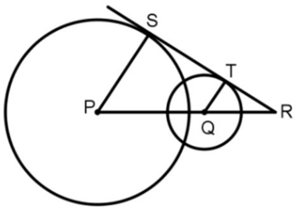
$\overrightarrow{AO}$ منصف للزاوية $\angle BAC$

(6)



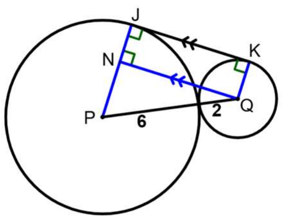

$$\overline{PJ} \perp \overline{JK} \quad , \quad \overline{QK} \perp \overline{JK}$$
$$let\ \overline{QN} \parallel \overline{JK} \Rightarrow \overline{PJ} \perp QN$$
$$QK = 3 \Rightarrow JN = 3 \Rightarrow PN = 11 - 3 = 8$$
$$PQ = 11 + 3 + 3 = 17$$
$$\Rightarrow QN = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$$
$$JK = QN = 15$$

(7)



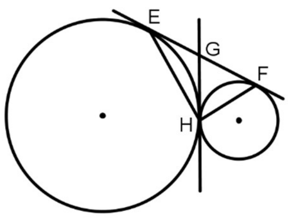

$$\overline{QT} \perp \overline{TS} \quad , \quad \overline{PS} \perp \overline{TS} \Rightarrow \overline{QT} \parallel \overline{PS}$$
$$QR = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow QP = 30 - 10 = 20$$
$$\Delta QTR \sim \Delta PSR \quad (AA)$$
$$\frac{QT}{PS} = \frac{QR}{PR} \Rightarrow \frac{6}{PS} = \frac{10}{30} \Rightarrow PS = 18$$
$$\frac{RT}{TS} = \frac{RQ}{QP} \Rightarrow \frac{8}{TS} = \frac{10}{20} \Rightarrow TS = 16$$

(8)



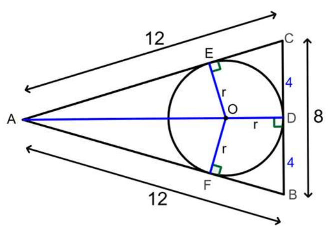

$$\overline{PJ} \perp \overline{JK} \quad , \quad \overline{QK} \perp \overline{JK}$$
$$let\ \overline{QN} \parallel \overline{JK} \Rightarrow \overline{PJ} \perp QN$$
$$QK = 2 \Rightarrow JN = 2 \Rightarrow PN = 6 - 2 = 4$$
$$PQ = 6 + 2 = 8$$
$$\Rightarrow QN = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$
$$JK = QN = 4\sqrt{3}$$

(9)



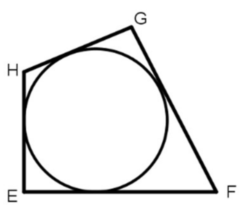

$$GF = GH \Rightarrow \angle GFH = \angle GHF = x$$
$$GE = GH \Rightarrow \angle GEH = \angle GHE = y$$
$$\Delta EHF: 2x + 2y = 180 \Rightarrow x + y = 90$$
$$\angle EHF = x + y = 90$$

(10)




$$\Delta ADC: AD = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$$
$$OD = r \Rightarrow AO = 8\sqrt{2} - r$$
$$\Delta ADC \sim \Delta AEO \quad (AA) \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{OE}{CD}$$
$$\Rightarrow \frac{8\sqrt{2} - r}{12} = \frac{r}{4} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

(11)




$$HG + EF = HE + GF$$
$$\Rightarrow 12 + 16 = HE + 15$$
$$\Rightarrow HE = 13$$

## تدريبات الأقواس والزوايا المركزية:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $m\angle 1 = 85^\circ$ | (2) | $m\angle 1 = 80^\circ$ |
| (3) | $m\angle 1 = 150^\circ$ | (4) | $m\angle 1 = 50^\circ$ |
| (5) | $m\angle 1 = 120^\circ$ | (6) | $m\angle 1 = 55^\circ$ |

(7)

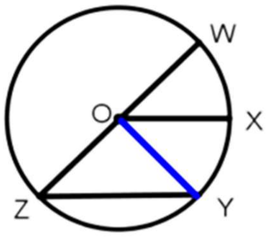
$\overline{OX} \parallel \overline{ZY}$

$\Rightarrow \angle WOX = \angle OZY\ , \angle OYZ = \angle XOY$

$OY = OZ \Rightarrow \angle OZY = \angle OYZ$

$\therefore \angle WOX = \angle OZY = \angle OYZ = \angle XOY$

$\Rightarrow \angle WOX = \angle XOY \Rightarrow \widehat{WX} \cong \widehat{XY}$



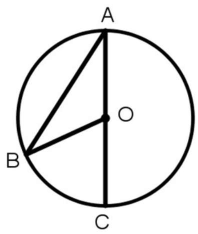

(8) على الشكل المجاور: $\overline{AC}$ قطر في الدائرة $O$

a) إذا كان $m\angle A = 35^\circ$ فإن $m\angle B = 35^\circ$ ،

$m\,\widehat{BC} = 70^\circ$ ، $m\angle BOC = 70^\circ$

b) إذا كان $m\angle A = n$ فإن $m\,\widehat{BC} = 2n$

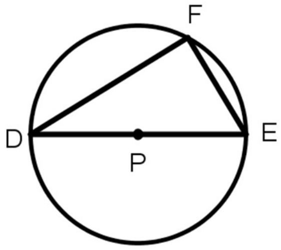
c) إذا كان $m\,\widehat{BC} = 6k$ فإن $m\angle A = 3k$




(9)

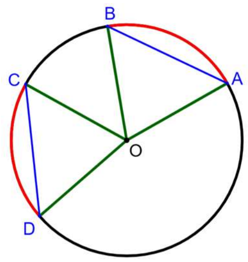
a) $\angle DEF = 90 - \frac{n}{2}$

b) $\angle DFE = 90$



## تدريبات الأقواس والأوتار:

(1)




a) $\overline{AB} \cong \overline{CD}\ , OA = OD = OB = OC = r$

$\Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD(SSS)$

$\Rightarrow \angle AOB \cong \angle COD\ \Rightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{CD}$

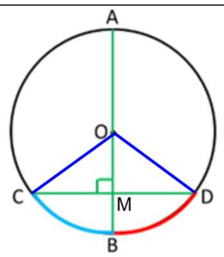
b) $\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \Rightarrow \angle AOB \cong \angle COD$

$OA = OD = OB = OC = r$

$\Rightarrow \Delta OAB \cong \Delta OCD(SAS)$

$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$

(2)



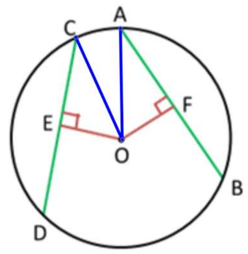

$OC = OD = r\ \ , OM = OM\ \ , \angle OMD = \angle OMC = 90°$

$\Rightarrow \Delta OMD \cong \Delta OMC(HL)$

$\Rightarrow MD = MC\ \ , \angle MOD = \angle MOC$

$\Rightarrow \widehat{BC} \cong \widehat{BD}$

(3)




a) $AB = CD \Rightarrow AF = CE\ ,\ OA = OC = r\ ,$

$\Rightarrow \Delta OFA \cong \Delta OEC(HL)$

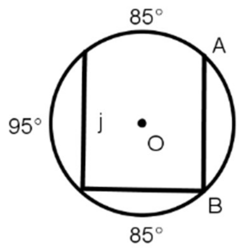
$\Rightarrow OF = OE$

b) $OF = OE\ ,\ OA = OC = r\ ,$

$\Rightarrow \Delta OFA \cong \Delta OEC(HL)$

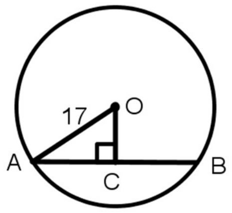
$\Rightarrow AF = CE\ \ \Rightarrow AB = CD$

(4)




$\overline{AB} = j$

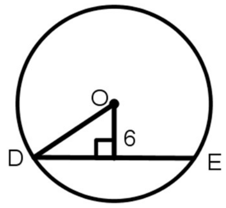
(5)




$OC = \sqrt{17^2 - 15^2}$

$OC = 8$

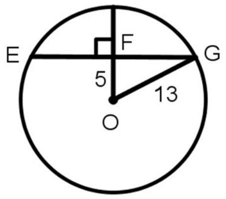
(6)




$OD = \sqrt{8^2 + 6^2}$

$OD = 10$

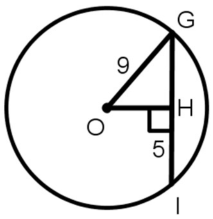
(7)




$FG = \sqrt{13^2 - 5^2}$

$EG = 20$

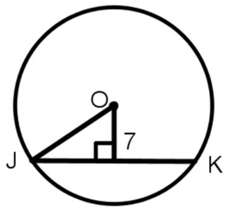
(8) في الشكل المجاور،




$OH = \sqrt{9^2 - 5^2}$

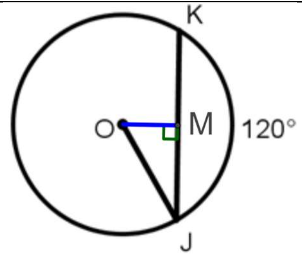
$OH = 2\sqrt{14}$

(9)



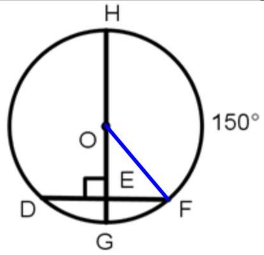

$OJ = 7\sqrt{2}$

**(10)**



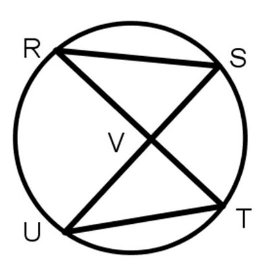

$$\angle JOM = \frac{120}{2} = 60°$$
$$\Rightarrow JM = 6\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow JK = 12\sqrt{3}$$

**(11)**



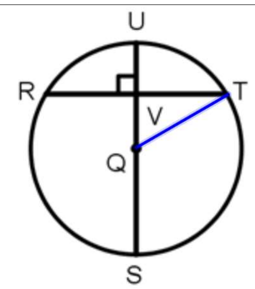

$$\overline{OE} = 8\sqrt{3}$$
$$\angle EOF = 180 - 150$$
$$= 30°$$
$$\Rightarrow \mathrm{OF} = 16 = OH$$
$$HG = 2 \times 16 = 32$$

**(12)**




$$\overline{RS} \cong \overline{UT}$$
$$,\angle R \cong \angle U ,$$
$$\angle RVS \cong \angle UVT$$
$$\Rightarrow \Delta RVS \cong \Delta UVT \quad (AAS)$$
$$\Rightarrow \overline{VS} \cong \overline{VT} , \overline{RV} \cong \overline{UV}$$

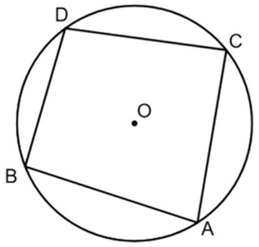
**(13)**




$$QT = QS = 10$$
$$VT = \frac{16}{2} = 8$$
$$\Rightarrow QV = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$
$$\Rightarrow UV = 10 - 6 = 4$$

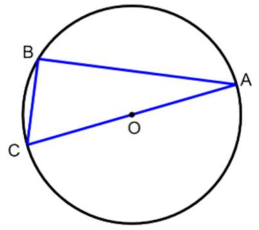
## تدريبات الزوايا المحيطية والمماسية:

(1)



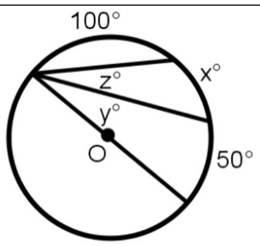

$$m\angle A + m\angle D = \frac{1}{2}(m\,\widehat{BDC} + m\,\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}(360°) = 180°$$

(2)



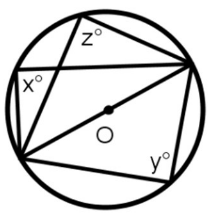

$$m\angle B = \frac{1}{2}(m\,\widehat{CA}) = (180°) = 90°$$

(3)



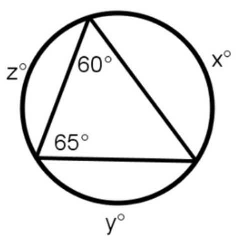

$$x = 180 - (100 + 50)$$
$$= 30°$$
$$y = \frac{50}{2} = 25°$$
$$z = \frac{30}{2} = 15°$$

(4)



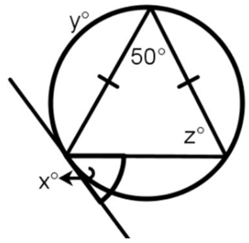

$$x = 90°$$
$$y = 90°$$
$$z = 90°$$

(5)



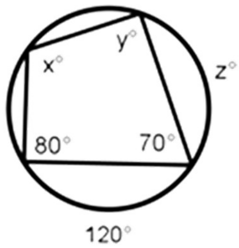

$$x = 2 \times 65 = 130°$$
$$y = 2 \times 60 = 120°$$
$$z = 360 - (130$$
$$+ 120)$$
$$= 110°$$

(6)



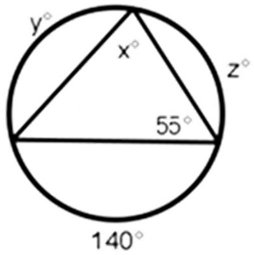

$$x = 50°$$
$$z = \frac{1}{2}(180 - 50) = 65$$
$$y = 2 \times 65 = 130°$$

(7)



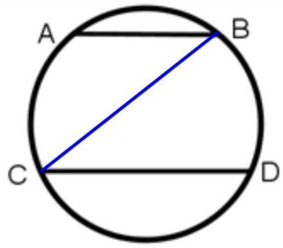

$$x = 180 - 70 = 110°$$
$$y = 180 - 80 = 100°$$
$$z = 2 \times 110 - 120$$
$$= 100°$$

(8)

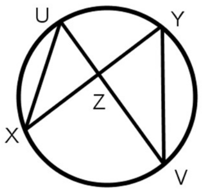
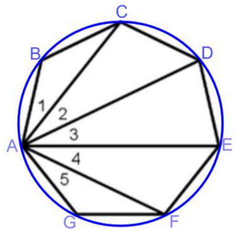
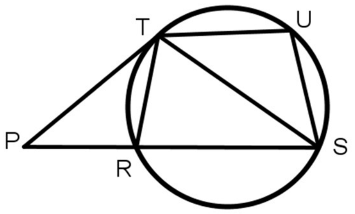



$$x = \frac{140}{2} = 70°$$
$$y = 2 \times 55 = 110°$$
$$z = 360 - (140$$
$$+ 110)$$
$$= 110°$$

(9)

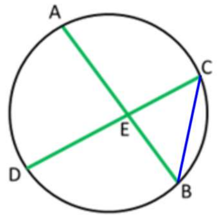



$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \angle ABC = \angle BCD$$
$$\Rightarrow \widehat{AC} \cong \widehat{BD}$$

| | | |
|---|---|---|
|   | $\angle XUV \cong \angle VYX$<br>$\angle YVU \cong \angle YXU$<br>$\Rightarrow \Delta UXZ \sim \Delta YVZ \;\; (AA)$ | $(10)$ |
|   | $\angle BAG = \dfrac{(7-2)\times 180}{7} = \dfrac{900°}{7}$<br>$\overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FG}$<br>$\Rightarrow \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DE} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{FG}$<br>$\Rightarrow \angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3 \cong \angle 4 \cong \angle 5 = \dfrac{180°}{7}$ | $(11)$ |
|   | $\overline{TU} \parallel \overline{PS}$<br>$\angle UTS \cong \angle RST \cong \angle RTP$<br>$\angle TUS \cong \angle STP \cong \angle TRP$<br>$\Rightarrow \Delta TUS \sim \Delta STP \sim \Delta TRP \;\; (AA)$ | $(12)$ |

## تدريبات الزوايا بين قاطعين:

(1)

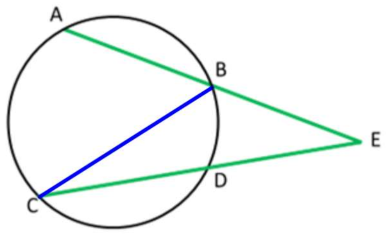



$$\angle \boldsymbol{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

$$\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

$$\angle AEC = \angle C + \angle B = \frac{1}{2}[\widehat{AC} + \widehat{BD}]$$

(2)




$$\angle \boldsymbol{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

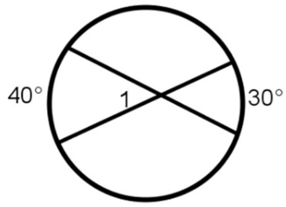
$$\angle \boldsymbol{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

$$\angle AEC = \angle ABC - \angle BCD = \frac{1}{2}[\widehat{AC} - \widehat{BD}]$$

(3) في الشكل المجاور،

$$m\angle 1 = \frac{30 + 40}{2}$$

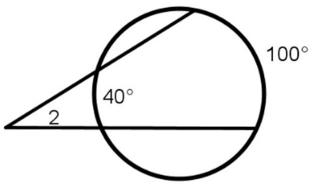
$$= 35°$$




(4) في الشكل المجاور،

$$m\angle 2 = \frac{100 - 40}{2}$$

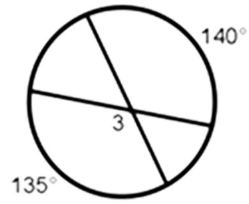
$$= 30°$$




(5) في الشكل المجاور،

$$m\angle 3 = \frac{140 + 135}{2}$$

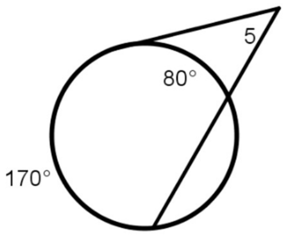
$$= 137.5°$$




(6) في الشكل المجاور،

$$m\angle 5 = \frac{170 - 80}{2}$$

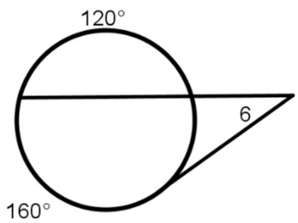
$$= 45°$$




(7) في الشكل المجاور،

$$m\angle 6 = \frac{160 - 80}{2}$$

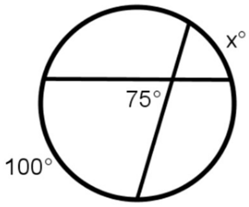
$$= 40°$$




(8) في الشكل المجاور،

$$75 = \frac{100 + x}{2}$$

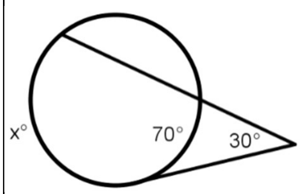
$$\Rightarrow x = 50°$$




(9) في الشكل المجاور،

$$30 = \frac{x - 70}{2}$$

$$\Rightarrow x = 130°$$

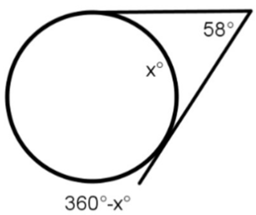



(10) في الشكل المجاور،

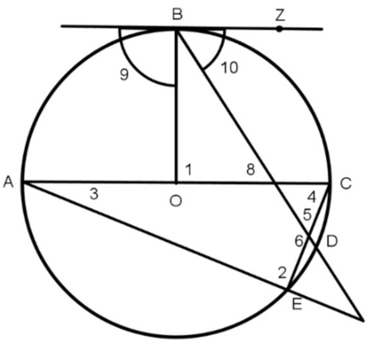
$$58 = \frac{360 - x - x}{2}$$

$$\Rightarrow 58 = 180 - x$$

$$\Rightarrow x = 122°$$

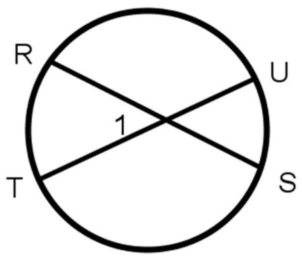


**(11)**




$$m\angle 1 = \overset{\frown}{BC} = 90^\circ$$
$$m\angle 2 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC} = 90^\circ$$
$$m\angle 3 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CE} = 25^\circ$$
$$m\angle 4 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AE} = 65^\circ$$
$$m\angle 5 = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DE}}{2} = 55^\circ$$
$$m\angle 6 = 180 - m\angle 5 = 125^\circ$$
$$m\angle 8 = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = 60^\circ$$
$$m\angle 9 = 90^\circ$$
$$m\angle 10 = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} = 60^\circ$$

**(12)** على الشكل المجاور،



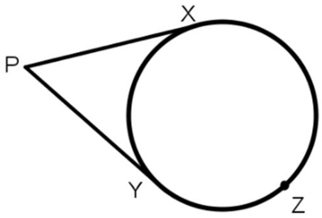

a) إذا كان $m\overset{\frown}{RT} = 80^\circ, m\overset{\frown}{US} = 40^\circ$، فإن $m\angle 1 = \frac{80+4}{2} = 60^\circ$

b) إذا كان $m\overset{\frown}{RU} = 130^\circ, m\overset{\frown}{TS} = 100^\circ$، فإن $m\angle 1 = \frac{130+100}{2} = 115^\circ$

c) إذا كان $m\overset{\frown}{RT} = 70^\circ, m\angle 1 = 50^\circ$، فإن $m\overset{\frown}{US} = 30^\circ$

d) إذا كان $m\overset{\frown}{US} = 36^\circ, m\angle 1 = 52^\circ$، فإن $m\overset{\frown}{RT} = 68^\circ$

**(13)** على الشكل المجاور: $\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}$ مماسان

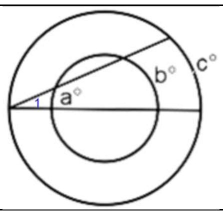



a) إذا كان $m\overset{\frown}{XZY} = 250^\circ$، فإن $m\angle P = 250 - 180 = 70^\circ$

b) إذا كان $m\overset{\frown}{XY} = 90^\circ$، فإن $m\angle P = 180 - 90 = 90^\circ$

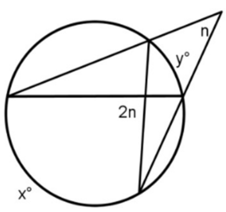
c) إذا كان $m\angle P = 85^\circ$، فإن $m\overset{\frown}{XY} = 180 - 85 = 95^\circ$

**(14)**



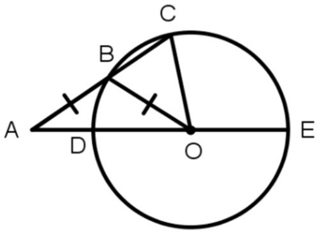

$$m\angle 1 = \frac{1}{2}C$$
$$m\angle 1 = \frac{b-a}{2}$$
$$\Rightarrow c = b - a$$

**(15)**




$$\frac{x+y}{2} = 2n \Rightarrow x + y = 4n$$
$$\frac{x-y}{2} = n \Rightarrow x - y = 2n$$
$$\Rightarrow x + y = 2x - 2y \Rightarrow x = 3y$$
$$\Rightarrow x : y = 3 : 1$$

(16)




$$\angle A = \frac{\overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{BD}}{2}$$
$$\angle BOD = \overset{\frown}{BD}$$
$$AB \cong BO \Rightarrow \angle A \cong \angle BOD$$
$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{CE} - \overset{\frown}{BD}}{2} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = 3\,\overset{\frown}{BD}$$

# حلول (نظرية الاعداد)

الحلول:

**(1)**

باقي قسمة 5 على 7 هو 5 لأن:

$$5 = 0 \times 7 + 5$$

**(2)**

على طريقة السؤال الأول لأن $n > m$، فإن باقي القسمة هو $m$.

$$m = 0 \times n + m$$

**(3)**

A. لاحظ في هذا السؤال لا نحتاج أن نقسم كامل العدد $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 + 2018^3$ على 9. ويكفي أن نبدل كل من الأعداد بباقي قسمتهم على 9 (من نظرية البواقي). إذا يصبح الناتج هو باقي قسمة $8 \times 0 \times 1 + 2^3$ على 9. وبالتالي فإن الباقي هو 8.

B. بنفس فكرة الفقرة السابقة، باقي قسمة $8^{100}$ على 7 هو نفس باقي قسمة $1^{100}$. وبالتالي فإن الباقي هو 1.

**(4)**

بما أن باقي $N_1$ على 3 هو $r_1$ يمكننا كتابة العدد $N_1$ كالتالي:

$$N_1 = k_1 \times 3 + r_1$$

وبالمثل، لدينا:

$$N_2 = k_2 \times 3 + r_2$$

إذا:

$$N_1 + N_2 = 3 \times (k_1 + k_2) + r_1 + r_2$$

لاحظ أن $3 \times (k_1 + k_2)$ يقبل القسمة على 3. إذا باقي $N_1 + N_2$ على 3 هو $r_1 + r_2$.

**(5)**

في التمارين من $8 - 5$، عندما نجرب الكثير من الأعداد، كل العبارات تبدو صحيحة. ولكن كيف نثبت صحتها لكل الأعداد $n$؟ الفكرة في هذه المسائل هي أن نبدل $n$ بالبواقي الممكنة عند قسمته على العدد الموجود في السؤال. ونتأكد أن بواقي النواتج الممكنة تحقق المطلوب.

البواقي الممكنة لـ $n$ عند قسمته على 5 هي $\{0,1,2,3,4\}$. إذا، البواقي الممكنة لـ $n^4 + 4n$ هي:

$$0^5 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$1^5 + 4 \cdot 1 = 5$$

$$2^5 + 4 \cdot 2 = 40$$

$$3^5 + 4 \cdot 3 = 255$$

$$4^5 + 4 \cdot 4 = 1040$$

وبما أن البواقي الممكنة كلها تقبل القسمة على 5. فإن العدد $n^4 + 4n$ لابد أن يقبل القسمة على 5.

**(6)**

البواقي الممكنة لـ $n$ عند قسمته على 3 هي $\{0,1,2\}$. إذا، البواقي الممكنة لـ $n^2+1$ هي:

$$0^2+1=1$$

$$1^2+1=2$$

$$2^2+1=5$$

وبما أن البواقي الممكنة كلها لا تقبل القسمة على 3. فإن العدد $n^2+1$ لايمكن أن يقبل القسمة على 3.

**(7)**

البواقي الممكنة لـ $n$ عند قسمته على 9 هي $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. إذا، البواقي الممكنة لـ $n^3$ هي:

$$n^3=\{0^3,1^3,2^3,3^3,4^3,5^3,6^3,7^3,8^3\}=\{0,1,8,0,1,8,0,1,8\}=\{0,1,8\}$$

والبواقي الممكنة لـ $n^3+2$ هي:

$$n^3+2=\{0+2,1+2,8+2\}=\{2,3,1\}$$

وبما أن البواقي الممكنة كلها لا تقبل القسمة على 9. فإن العدد $n^3+2$ لايمكن أن يقبل القسمة على 9.

**(8)**

في هذا السؤال، يجب أن نثبت أن العدد $n^3-n$ يقبل القسمة على 3 و 8 كي نثبت أنه يقبل القسمة على 24.
البواقي الممكنة لـ $n$ عند قسمته على 3 هي $\{0,1,2\}$. إذا، البواقي الممكنة لـ $n^3-n$ هي:

$$0^3-0=0$$

$$1^3-1=0$$

$$2^3-2=6$$

وبما أن البواقي الممكنة كلها تقبل القسمة على 3. فإن العدد $n^3-n$ لابد أن يقبل القسمة على 3.

بالمثل، البواقي الممكنة لـ $n$ عند قسمته على 8 هي $\{1,3,5,7\}$ لأنه إذا كان الباقي زوجيا فإن $n$ سيكون زوجي وهذا مستحيل. إذا، البواقي الممكنة لـ $n^3-n$ هي:

$$1^3-1=0$$

$$3^3-3=24$$

$$5^3-5=120$$

$$7^3-7=336$$

وبما أن البواقي الممكنة كلها تقبل القسمة على 8. فإن العدد $n^3-n$ لابد أن يقبل القسمة على 8.

وبما أنه يقبل القسمة على 3,8 إذا هو يقبل القسمة على 24.

**(9)**

في هذا السؤال والذي يليه. نلاحظ الخاصية التالية للأعداد الأولية الأكبر من 3. وهي أن أي عدد أولي $p > 3$ يمكن كتابته على أحد الصورتين:

$$p = 6k + 1, p = 6k - 1$$

وهذا لأن بواقي $p$ الممكنة لا يمكن أن تكون $\{0,2,3,4\}$ لأن العدد لن يكون أولي في تلك الحالة (كمثال: إذا كان باقي $p$ هو 4 فإن $p = 6k + 4 = 2(3k + 2)$ وهذا ليس أولي لأنه يقبل القسمة على 2 و $3k + 2$).

إذا عند تعويض الصور الممكنة لـ$p$ نلاحظ أن:

$$p^2 - 1 = (6k \pm 1)^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k + 1 - 1 = 12(3k^2 \pm k)$$

ونلاحظ أن $3k^2 \pm k$ عدد زوجي. إذا، $p^2 - 1$ يقبل القسمة على 24 لأنه عبارة عن 12 ضرب عدد زوجي.

**(10)**

أن أي عدد أولي $p > 3$ يمكن كتابته على أحد الصورتين:

$$p = 6k_1 + 1, p = 6k_1 - 1$$

بالمثل:

$$q = 6k_2 + 1, q = 6k_2 - 1$$

بالتالي:

$$p^2 - q^2 = (6k_1 \pm 1)^2 - (6k_2 \pm 1)^2 = 36k_1^2 \pm 12k_1 + 1 - 36k_2^2 \pm 12k_2 - 1$$
$$= 36(k_1^2 - k_2^2) + 12(\pm k_1 \pm k_2) = 12(3k_1^2 \pm k_1 + 3k_2^2 \pm k_2)$$

ولكن $(3k_1^2 \pm k_1 + 3k_2^2 \pm k_2)$ هو عدد زوجي. إذا $p^2 - q^2$ يقبل القسمة على *24*.

طريقة أخرى للحل هي أن نثبت أن $p^2 - q^2$ يقبل على 3,8. بما أن $p$ عدد أولي أكبر من 3. لاحظ أن البواقي الممكنة لـ $p$ على 3 هي $\{1,2\}$ وعلى 8 هي $\{1,3,5,7\}$ اذا البواقي الممكنة لـ $p^2$ على 3:

$$p^2 = \{1^2, 2^2\} = \{1\}$$

وعلى 8:

$$p^2 = \{1^2, 3^2, 5^2, 7^2\} = \{1\}$$

بالمثل لـ $q$. إذا، البواقي الممكنة لـ $p^2 - q^2$ على 3 أو 8 هي:

$$p^2 - q^2 = \{1 - 1\} = \{0\}$$

إذا، العدد $p^2 - q^2$ يقبل القسمة على 24.

**(11)**

بما أنه لدينا تساوي بين قيمتين، كل من القيمتين يجب أن يكون لهم نفس الباقي عند قسمتهم على أي عدد. سنجرب الثلاثة (لأن السؤال طلب اثبات القسمة على 3). ونفرض، من أجل الوصول الى تناقض، أن كل من $x, y, z$ لا يقبل القسمة على 3. إذا، البواقي الممكنة لـ $x^2, y^2, z^2$ عند قسمتهم على 3 هي:

$$x^2 = \{1^2, 2^2\} = \{1\}$$

وبالمثل لـ $y^2, z^2$. ولكن لدينا المعادلة:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

باقي قسمة الطرف الأيسر على 3 هو 2. في حين أن باقي قسمة الطرف الأيمن على 3 هو 1. وهذا يناقض الفرضية.

بالتالي، أحد الأعداد $x, y, z$ يجب أن يقبل القسمة على 3.

**(12)**

سوف نثبت أن العددين $a, b$ كلاهما يقبلان القسمة على 3 و 7. بالتالي، $a^2, b^2$ كلاهما يقبلان القسمة على 9,49

وبالتالي، فإن: $441 = 9 \times 49 | a^2 + b^2$

لاحظ أن البواقي الممكنة لـ $a, b$ على الـ 3 هي $\{0,1,2\}$. بالتالي، البواقي الممكنة لـ $a^2, b^2$ هي:

$$a^2, b^2 = \{0^2, 1^2, 2^2\} = \{0,1\}$$

إذا، البواقي الممكنة لـ $a^2 + b^2$ هي:

$$a^2 + b^2 = \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1, 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

ولكن، معطى أن $a^2 + b^2$ يقبل القسمة على 3. إذا الباقي لـ $a^2 + b^2$ يجب أن يساوي صفر. وهذا لا يتحقق الا اذا كان كل من $a, b$ يقبل القسمة على 3.

بالمثل، البواقي الممكنة لـ $a, b$ على الـ 7 هي $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. بالتالي، البواقي الممكنة لـ $a^2, b^2$ هي:

$$a^2, b^2 = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2\} = \{0,1,4\}$$

إذا، البواقي الممكنة لـ $a^2 + b^2$ هي:

$$a^2 + b^2 = \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1, = 1 \\ 0 + 4 = 4 \\ 1 + 1 = 2 \\ 1 + 4 = 5 \\ 4 + 4 = 8 \end{cases}$$

ولكن، معطى أن $a^2 + b^2$ يقبل القسمة على 7. إذا الباقي لـ $a^2 + b^2$ يجب أن يساوي صفر. وهذا لا يتحقق الا اذا كان كل من $a, b$ يقبل القسمة على 7.

وبما أن كل من $a, b$ يقبل على 3,7. إذا:

$$3^2 | a^2 + b^2, 7^2 | a^2 + b^2 => 441 | a^2 + b^2$$

**(13)**

لاحظ أن باقي $a$ على 6 يساوي باقي $a^3$ على 6 لأن:

$$a = \{0,1,2,3,4,5\}$$
$$a^3 = \{0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3\} = \{0,1,8,27,64,125\} = \{0,1,2,3,4,5\}$$

بالتالي، باقي $a^3 + b^3 + c^3$ يساوي باقي $a + b + c$ والذي يقبل القسمة على 3.

**(14)**

سنفرض، من أجل الوصول الى تناقض، أن $d$ لا يقبل القسمة على 6. بالتالي، باقي قسمة $d$ على 6 هو $\{1,2,3,4,5\}$،

وبما أن $p, q, r$ أعداد أولية أكبر من 3 فإن $p$ يكتب على صورة:

$$p = 6k + 1, p = 6k - 1$$

سنأخذ الحالتين مع البواقي الممكنة لـ $d$ ونثبت أن $q$ أو $r$ لن يكون أوليا.

حالة ١: $p = 6k + 1$ فإن بواقي $q, r$ على 6 ستكون كالتالي :

$$q = p + d = \begin{cases} 6k + 1 + 1 = 2(3k + 1) \\ 6k + 1 + 2 = 3(2k + 1) \\ 6k + 1 + 3 = 2(3k + 2) \\ 6k + 1 + 4 = 6k + 5 \\ 6k + 1 + 5 = 6(k + 1) \end{cases}, r = p + 2d = \begin{cases} 6k + 1 + 2 = 3(2k + 1) \\ 6k + 1 + 4 = 6k + 5 \\ 6k + 1 + 6 = 6k + 7 \\ 6k + 1 + 8 = 3(2k + 3) \\ 6k + 1 + 10 = 6k + 11 \end{cases}$$

لاحظ أنه في كل الحالات، احد العددين $q, r$ ليس أولي. إذا هذا يناقض فرضية أن $d$ لا يقبل القسمة على 6.

حالة ٢: بالمثل لحالة ١. وسنصل الى تناقض. وبالتالي $d$ يجب أن يقبل القسمة على 6.

## الحلول (تركيبات)

### تمارين متنوعة

**(2)**

كل الأعداد ذات 10 خانات = $9 \times 10^9$

التي كل خاناتها مختلفة = $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times \ldots \times 1$

إذن المطلوبة = $9 \times 10^9 - 9 \times 9!$

**(1)**

نختار شخص للغرفة الاول ثم شخصان للثانية ثم البقية للغرفة الاخيرة (لاحظ ان التوافيق الاخير يمكن اهماله لان الاربعة المتبقيين سيذهبون للغرفة الاخيرة اجباريا):

$$\binom{7}{1} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{4} = 105$$

**(4)**

العدد الكلي = $9 \times 10^6$

التي لا تحوي "1" = $8 \times 9^6$

وهذا لا يساوي النصف، إذن الجواب: لا.

**(3)**

نأخذ حالات عدد B ونجمعهم:

$$\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3}$$

**(6)**

نختار صف وعمود لكل قلعة لوضع القلاع فيها ولا يتكرر اي صف او اي عمود لان لا يمكن وجود قلعتين في نفس الصف او العمود. ثم نقسم على $4!$ لتماثل القلاع:

$$\frac{(8 \times 8) \times (7 \times 7) \times (6 \times 6) \times (5 \times 5)}{4!}$$

**(5)**

ننظر الى اول ٩ خانات من اليسار، اذا كان مجموعها زوجي (افرض عددها A) اذا الاحاد يجب ان تكون زوجية ولها 5 خيارات، واذا كان فردي (عددها B) يجب ان تكون الاحاد فردية ولها 5 خيارات.

إذا المجموع: $5A + 5B = 5(A + B)$

$A + B$ هي الاعداد من 9 خانات وتساوي $9 \times 10^8$

الجواب: $5 \times 9 \times 10^8$

**(8)**

بما أن جواد ثابت في اللجنة، نختار شخصين من التسعة الباقين: $\binom{9}{2}$

**(7)**

نعدّ A وB ككتلة واحدة مع باقي 4 كتب اذا لهم $5!$ ترتيب. داخل الكتلة ترتيبان (AB أو BA):

$5! \times 2$

# الترتيب التصاعدي والتنازلي

**(2)**

نفس فكرة السؤال السابق يكون جواب الفقرتين

نفسه وهو : $\binom{8}{3} = 56 = \binom{8}{5}$

**(1)**

لاحظ ان اختيار 3 خانات تكفي لتحديد الترتيب تصاعدي او تنازلي. وفي حالة التصاعدي لا يمكن اختيار الصفر لأنه يكون في خانة المئات.

تصاعدي: نختار 3 أرقام مختلفة من $1,2..,9$ : $\binom{9}{3}$

تنازلي: 3 أرقام مختلفة من $0,1..,9$ : $\binom{10}{3}$

إذن العدد الكلي: $\binom{9}{3} + \binom{10}{3} = 204$

**(4)**

طرق سحب 3 كروت مع الترتيب: 10 × 9 × 8

الفوز لسالم (ترتيب تصاعدي) : $\binom{10}{3} = 120$

لان لكل 3 كروت ترتيب واحد فقط تصاعدي

النتيجة: محمد حظه أكبر، سالم يفوز في حوالي %16.7 من الحالات

**(3)**

حالة التصاعدي تختلف حيث لا يمكن اختيار الصفر:

a) $\binom{8}{4}$

b) $\binom{9}{4}$

## عدد المسارات على شبكة

**(1)**

نحتاج 6 قفزات للامام و 7 للخلف للنقطة 1−

اذا عدد الطرق هو عدد اختيار 6 قفزات للامام من اصل 13 قفزة:

$\binom{13}{6}$ او $\binom{13}{7}$ وهم متساويين

**(2)**

48

**(3)**

كل مستطيل يُحدد باختيار خطين عموديين من الخطوط العمودية وخطين أفقيين من الخطوط

الأفقية : $\binom{10}{2} \times \binom{8}{2} = 1260$

**(4)**

لدينا 25 حرف نختار منهم اثنان بالتوافيق (ولهم ترتيب واحد لانهم مرتبين ابجديا) وكذلك نختار رقمان من اصل 9:

$$\binom{25}{2} \times \binom{9}{2} = 10800$$

**(5)**

3 حروف علة (A,O,U) نختار منها 2: $3 = \binom{3}{2}$

وهناك 6 حروف ساكنة: M,T,T,H,C,N

3 حروف بدون T : $4 = \binom{4}{3}$

3 حروف منها T واحدة: $6 = \binom{4}{2}$

3 حروف منها اثنان T : $4 = \binom{4}{1}$

لان لكل الحالات يوجد 4 حروف غير T

المجموع: $42 = 3(4+6+4)$

# النجوم والأشرطة

**(2)**

نضع 5 سيارات في صف وهناك 5 مواقف متاحة ولها !5 ترتيب. المطلوب أن يكون هناك على الأقل موقف واحد بين كل سيارتين، فنضع 4 مواقف بين السيارات الأربع، ويبقى موقف واحد يمكن وضعه في أي من الفراغات الستة الممكنة (قبل أول سيارة، بين السيارات، أو بعد السيارة الأخيرة)، وبذلك يكون عدد الترتيبات = $5! \cdot 6$

**(1)**

نضع صندوق في كل غرفة في البداية لضمان شرط وجود صندوق على الاقل في كل غرفة.  يتبقى 7 صناديق نريد توزيعها على الثلاث غرف. من النجوم والأشرطة نحصل على الجواب:

$$\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

**(4)**

بما ان جميع حدود المعادلة موجبة، نستطيع طرح 1 من كل حد ليتكون لدينا معادلة من 4 حدود غير سالبة مجموعها 76. الان يمكننا تطبيق النجوم والأشرطة لنحصل على الجواب:

$$\binom{76+4-1}{4-1} = \binom{79}{3}$$

**(3)**

بتطبيق النجوم الأشرطة لدينا 80 عنصر نريد توزيعه على 4 أقسام:

$$\binom{80+4-1}{4-1} = \binom{83}{3}$$

**(6)**

لحساب عدد الطرق لوضع 3 أساتذة و6 طلاب على 9 كراسي بحيث يجلس كل معلم بين طالبين، نستبعد الطرفين فلا يمكن للأساتذة الجلوس عليهما، فتتبقى 7 مقاعد وسطية، نختار 3 مقاعد للأساتذة مع ترك كرسي فارغ بين كل اثنين لضمان عدم التجاور، ترتيب الأساتذة !3، ثم نوزع الكرسيين المتبقيين على 4 أماكن متاحة (قبل المعلم الأول، بين المعلمين، بعد المعلم الثالث) باستخدام النجوم والأشرطة

$$\binom{2+4-1}{4-1} = \binom{5}{3} = 10$$

ويكون الناتج النهائي، مضروبا في طرق ترتيب الطلاب: $3! \cdot 10 \cdot 6! \ = \ 43200$

**(5)**

عدد طرق وجود 4 مواقف فارغة بشكل عام يمكن إيجاده مباشرة من التوافيق:

$$\binom{16}{4} = 1820$$

الان نحسب عدد المكملة وهي توزيع المواقف مع شرط عدم تجاور موقفين. نضع ال12 سيارة في صف. لدينا 4 مواقف غير مستخدمة يمكننا وضعها في 13 فراغ بين السيارات وعلى الحدود.

نختار 4 اماكن من ال13 لوضع المواقف:

$$\binom{13}{4} = 715$$

اذن هناك

$$1820 - 715 = 1105$$

طريقة يستطيع سجاد الوقوف فيها مع احتمال:

$$\frac{1105}{1820} = 60\%$$

## أسئلة التحدي

### (2)

بما ان العدد الزوجي يجب ان يكون اصغر رقم زوجي (لانها تنازلية). اذن يجب ان نختار 6 اعداد من 0 الى 9 بحيث اصغرها زوجي.

نقسمها حالات ان يكون 0 هو الاصغر ونختار 5 اعداد من 1 الى 9. او 2 هو الاصغر ونختار 5 اعداد من 3 الى 9. او 4 هو الاصغر ونختار 5 اعداد من 5 الى 9. لاحظ انه 6 او 8 يمكن ان يكونوا الاصغار لعدم وجود اعداد كافية

الجواب: $\binom{9}{5}+\binom{7}{5}+\binom{5}{5}=148$

### (1)

اما لا يختار أي منهما: $\binom{10}{4}$

او ان يختار واحد منهم فقط: $2.\binom{10}{3}$

المجموع: $2.\binom{10}{3}+\binom{10}{4}$

### (4)

نختار صف مختلف وعمود مختلف لكل قلعة لكي لا يتقاتلون. بعد ذلك نقسم على !4 لتشابه الوان الاربعة الاولى و نقسم ايضا على !4 أخرى لتشابه لون الاربعة الثانية.

يكون الجواب:

$$\frac{(8\times 8)\times(7\times 7)\times\ldots\times(1\times 1)}{4!\times 4!}$$

### (3)

اولا نعطي كل طفل قطعة حلوى لضمان الشرط الاول. يتبقى 12 قطعة نوزعها على 3 اطفال بحيث ياخذ الاول 6 منها على الاكثر. عدد الطرق بدون الشرط من النجوم والأشرطة:

$$\binom{12+3-1}{3-1}=\binom{14}{2}=91$$

الان نعطي الطفل الاول 7 قطع من ال12 لنحسب عدد الطرق الي لا تحقق الشرط، يتبقى 5 قطع نوزعها

على 3 أطفال: $\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$

ويكون الجواب النهائي: $91-21=70$

**(6)**

نحسب الطالبين المتجاورين كعنصر واحد، يصبح لدينا 7 عناصر نرتبها حول طاولة في !6 طريقة (ترتيب دائري). ثم نضرب في 2 لتبديل مكانيهما الان نطرح الحالات التي يكون فيها الشخص الثالث مجاور للطالبين الاوليين، أما ان يكون يمينهم او يسارهم. ولترتيب الخمسة البقية !5 ترتيب. ثم نضرب في 2 لتبديل مكانيهما

اذن الجواب النهائي:

$$2 \times 6! - 2 \times 2 \times 5! \ = \ 2 \times 480 = 960$$

**(5)**

هناك !50 طريقة لترتيب المعلمين على الطاولات، ثم نرتب الطلاب ايضا !50 لان الطاولات متمايزة.

الان على كل طاولة يوجد ترتيبين للطالب والمعلم بما ان الكراسي متمايزة لذلك يجب ان نضرب في $2^{50}$.

ويكون الجواب: $50! \times 50! \times 2^{50}$

نسمو
NSMO
أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني

وزارة التعليم
Ministry of Education

موهبة
Mawhiba